

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО КУЛЬТУРИ УКРАЇНИ
ЛУГАНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ КУЛЬТУРИ І МИСТЕЦТВ



ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів спеціалізації “Звукорежисура”
освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр” усіх форм навчання

Луганськ – 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО КУЛЬТУРИ УКРАЇНИ
ЛУГАНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ КУЛЬТУРИ І МИСТЕЦТВ



О. С. Воронкін, П. С. Солодовник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи студентів спеціалізації “Звукорежисура”
освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр” усіх форм навчання**

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри музичного
мистецтва естради
(протокол № 5 від 08.01.2013р.)

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні навчально-методичної
комісії
(протокол № 7 від 06.02.2013р.)

Луганськ – 2013

УДК 51:33+517
ББК 65.050
В753

Укладачі:

О.С. Воронкін,

ст. викладач кафедри музичного мистецтва естради ЛДАКМ, член українського фізичного товариства, магістр з приладів;

П.С. Солодовник,

доцент кафедри менеджменту ЛДАКМ, кандидат технічних наук, доцент.

Рецензент:

В.Є. Бахрушин,

професор кафедри системного аналізу та програмної інженерії Класичного приватного університету, доктор фізико-математичних наук, академік Академії наук вищої школи України, член-кореспондент Російської Академії природознавства, професор

Відповідальний за випуск: Я.Л. Масольд

В753 Методичні вказівки та індивідуальні завдання з **дисципліни “Вища математика”** для студентів спеціалізації 6.020204 “Звукорежисура” усіх форм навчання / Укл.: О. С. Воронкін, П.С. Солодовник. – Луганськ: Вид-во ЛДАКМ, 2013. – 76 с. : іл. 12, табл. 11, бібліогр. 32 назв.

Методичні вказівки розроблені у відповідності до навчального плану та програми курсу “Вища математика” для студентів І курсу спеціалізації “Звукорежисура” ЛДАКМ. У методичних вказівках розміщений перелік програмних питань курсу й орієнтовний перелік екзаменаційних питань, приклади розв’язання типових задач, рекомендації по виконанню та оформленню контрольної роботи, а також список рекомендованої літератури.

УДК 51:33+517
ББК 65.050

© Воронкін О.С., Солодовник П.С.,
укладання, 2013

© Луганська державна академія
культури і мистецтв, 2013

ВСТУП

Математика є фундаментальною дисципліною. Математичні методи є основою усіх галузей сучасної науки і технології. Викладання математики передбачає розвиток логічного та алгоритмічного мислення, а також надбання навиків самостійно розширювати математичні знання та застосовувати їх на практиці. Використання й розуміння математики є міцним фундаментом розв'язання багатьох задач акустики.

Мета дисципліни – забезпечити належну базову математичну підготовку студентів та сформувані у них вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ та у професійній діяльності.

Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач, виробити навички математичного дослідження прикладних математичних задач, прищепити студентам уміння самостійно вивчати літературу з математики та її прикладних питань.

Навчальний процес з курсу вищої математики для студентів факультету музичного мистецтва (спеціалізація “Звукорежисура”), що навчаються за фахом 6.020204 триває 2 (два) семестри на першому курсі навчання. У третьому семестрі студенти вивчатимуть курс „Теорія ймовірностей та математична статистика”.

На лекціях викладається зміст, проводиться аналіз основних категорій, понять і методів математики. На практичних заняттях студенти оволодівають основними методами, підходами та засобами розв'язування математичних задач, а також одержують пояснення теоретичних положень дисципліни.

Важливим фактором засвоєння математики і оволодіння її методами є самостійна робота студентів. Ця робота складається з неперервної роботи над виконанням домашніх і циклічних індивідуальних розрахунково-графічних завдань.

Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання домашніх завдань і захист типових розрахунково-графічних завдань. На протязі кожного семестру студенти денної форми навчання виконують і захищають по два типових розрахунково-графічних завдання. Студенти заочного відділення подібним чином виконують дві контрольні роботи (по одній у кожному семестрі).

Дані методичні вказівки спрямовані на те, щоб надати студенту необхідну інформацію про те, які завдання необхідно виконати у кожній контрольній роботі. Наводяться зразки розв'язання відповідних завдань.

При виконанні розрахунково-графічної чи контрольної роботи студент повинен дотримуватись наступних правил:

- 1) перед розв'язуванням конкретної задачі треба привести повністю її умову;

- 2) при розв'язанні задач слід дотримуватись тієї послідовності, в якій вказані питання в завданні, строго зберігаючи нумерацію задач;
- 3) розв'язування задач повинно супроводжуватись поясненнями і в разі необхідності графічним зображенням; кінцеві результати потрібно виділяти;
- 4) у кінці роботи треба привести список опрацьованої літератури.

Таблиця 1

Структурований навчальний план дисципліни

Форма навчання	Курс	Семестр	Загальний, год. / кредитів ECTS	Обсяг годин			
				у тому числі			
				аудиторні заняття			самостійна робота студентів (СРС)
				всього	лекції	практичні	
Денна	1	1, 2	216/6	140	70	70	76
Заочна				24	12	12	192

Таблиця 2

Денна форма навчання

Семестр	Структура навчальної дисципліни	Кількість годин, з них				Форма контролю
		всього, год./кредитів	аудиторних		СРС	
			Лекц.	Практ. занять		
I	Модуль 1 Модуль 2	108 / 3	36	36	36	Залік
II	Модуль 3 Модуль 4	108 / 3	34	34	40	Іспит

Таблиця 3

Заочна форма навчання

Семестр	Структура навчальної дисципліни	Кількість годин, з них				Форма контролю
		всього, год./кредитів	аудиторних		СРС	
			Лекц.	Практ. занять		
I	Модуль 1 Модуль 2	108 / 3	6	6	96	Залік
II	Модуль 3 Модуль 4	108 / 3	6	6	96	Іспит

Таблиця 4

Навчально-тематичний план дисципліни на I-й семестр

№	Тема курсу	Денна форма навчання					Заочна форма навчання				
		Кількість годин					Кількість годин				
		Аудиторні заняття	У тому числі		Самостійна робота	Всього	Аудиторні заняття	У тому числі		Самостійна робота	Всього
			Лекційні заняття	Практичні заняття				Лекційні заняття	Практичні заняття		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
МОДУЛЬ I											
I Вступ до вищої математики											
	Місце і роль математики посеред інших наук	4	2	2	-	4	1	1	-	8	9
	Елементи математичної логіки	4	2	2	2	6	-	-	-	8	8
	Множини та комплексні числа	6	2	4	4	10	-	-	-	8	8
II Основи лінійної алгебри											
	Матриці. Визначники квадратних матриць	8	4	4	4	12	2	1	1	8	10
	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	8	4	4	4	12	2	1	1	8	10
III Елементи векторної алгебри											
	Вектори	6	2	4	4	10	2	1	1	8	10
	Лінійний векторний простір	6	4	2	4	10	1	-	1	8	9
МОДУЛЬ II											
IV Аналітична геометрія											
	Пряма на площині. Площина та пряма у просторі	6	4	2	4	10	2	1	1	8	10
	Криві (лінії) другого порядку на площині	6	4	2	4	10	-	-	-	8	8
V Вступ до математичного аналізу											
	Функціональна залежність	6	2	4	2	8	2	1	1	8	10
	Числові послідовності	4	2	2	2	6	-	-	-	8	8
	Границя і неперервність функції	8	4	4	2	10	-	-	-	8	8
Всього за 1-й семестр		72	36	36	36	108	12	6	6	96	108

Таблиця 5.

Навчально-тематичний план дисципліни на II-й семестр

№	Тема курсу	Денна форма навчання					Заочна форма навчання				
		Кількість годин					Кількість годин				
		Аудиторні заняття	У тому числі		Самостійна робота	Всього	Аудиторні заняття	У тому числі		Самостійна робота	Всього
			Лекційні заняття	Практичні заняття				Лекційні заняття	Практичні заняття		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
МОДУЛЬ III											
VI Диференціальне числення функцій однієї змінної											
	Диференціальне числення функцій однієї змінної	4	2	2	4	8	4	2	2	9	13
	Дослідження функцій за допомогою похідних	8	4	4	4	12	-	-	-	9	9
VII Функції багатьох змінних											
	Частинні похідні	4	2	2	4	8	2	1	1	9	11
	Локальний екстремум функцій багатьох змінних	4	2	2	4	8	-	-	-	9	9
VIII Інтегральне числення											
	Невизначений інтеграл	8	4	4	4	12	2	1	1	9	11
	Визначений інтеграл	8	4	4	4	12	-	-	-	9	9
	Поняття про невластиві та кратні інтеграли	4	2	2	4	8	-	-	-	6	6
МОДУЛЬ IV											
IX Ряди											
	Числові ряди	8	4	4	4	12	2	1	1	9	11
	Функціональні та степеневі ряди	8	4	4	4	12	-	-	-	9	9
X Диференціальні рівняння											
	Диференціальні рівняння першого порядку	4	2	2	4	8	2	1	1	9	11
	Диференціальні рівняння вищих порядків	8	4	4	-	8	-	-	-	9	9
Всього за 2-й семестр		68	34	34	40	108	12	6	6	96	108

I. НАЗВА ТА ЗМІСТ ЛЕКЦІЙНОГО КУРСУ ДИСЦИПЛІНИ

РОЗДІЛ 1. ВСТУП ДО ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Тема 1.1. *Місце і роль математики посеред інших наук* – 2 год.

Предмет та задачі вищої математики. Основні етапи розвитку математики. Математичні поняття і методи. Основні розділи курсу. Зв'язок математики із іншими дисциплінами. Математика як інструмент акустики.

Тема 1.2. *Елементи математичної логіки* – 2 год.

Висловлення. Основні логічні зв'язки (операції) логіки висловів. Основні схеми логічно правильних міркувань. Алгебра логіки.

Тема 1.3. *Множини та комплексні числа* – 2 год.

Поняття множини як первісного поняття математики. Способи подання множини. Порожня та універсальна множини. Операції над множинами. Числові множини. Необхідність розширення поняття дійсного числа. Комплексні числа. Поняття комплексного числа та його геометричне зображення. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі. Модуль, аргумент і тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

Література [1]: с. 59–61 або [2]: с. 4–10 або [6]: 5–27.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 2.1. *Матриці та дії над ними* – 2 год.

Поняття матриці. Види матриць (квадратна, діагональна, одинична, нульова, симетрична, транспонована, східчаста), дії з матрицями (множення матриці на скаляр, додавання і віднімання матриць, множення матриць), властивості дій над матрицями, елементарні перетворення матриць.

Література [1]: с. 3–5 або [2]: с. 39–42 або [5]: 51–58.

Тема 2.2. *Визначники квадратних матриць, методи їх обчислення та властивості* – 2 год.

Поняття визначників 2-го і 3-го порядків та їх обчислення. Поняття визначника n -го порядку як розкладу його за елементами першого рядка. Поняття мінора та алгебраїчного доповнення елементів квадратної матриці. Властивості визначників. Обернена матриця та методи її знаходження, матричні рівняння, ранг матриці.

Література [1]: с. 5–6 або [5]: 31–38.

Тема 2.3. *Системи лінійних алгебраїчних рівнянь* – 4 год.

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), її запис у матричному вигляді. Теорема Кронекера-Капеллі. Правило Крамера розв'язування системи рівнянь. Метод Гаусса.

Література [1]: с. 10–17 або [2]: с. 42–44 або [6]: 27–48.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 3.1. *Вектори на площині і в просторі* – 2 год.

Поняття вектора на площині і в просторі, дії з векторами (додавання та віднімання, множення вектора на скаляр, порівняння векторів). Декартова прямокутна система координат, проекція вектора на вісь, довжина вектора та її властивості. Скалярний добуток векторів і кут між векторами, векторний добуток двох векторів, змішаний добуток трьох векторів, геометрична ілюстрація цих операцій. Відстань між векторами.

Література [1]: с. 33–41 або [2]: с. 10–20 або [3]: 248–260.

Тема 3.2. *Лінійний векторний простір* – 4 год.

Означення лінійного простору. Означення та основні теореми про лінійну залежність, лінійну незалежність елементів лінійного простору. Базис лінійного простору. Основні теореми про базис: єдиність розкладу, лінійна залежність $(n+1)$ елементів, кількість базисних елементів. Розмірність лінійного простору. Координати елементів простору за даним базисом. Поняття підпростору. Поняття лінійного векторного простору. Ранг скінченної системи векторів, правила його обчислення.

Література [6]: с. 48–56.

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 4.1. *Пряма на площині* – 2 год.

Рівняння прямої на площині (канонічне рівняння прямої; рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки; рівняння прямої у відрізках; рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до вектора; нормальне рівняння прямої; загальне рівняння прямої). Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої.

Література [1]: с. 41–46 або [2]: с. 21–26 або [3]: 34–54 або [5]: с. 61–73.

Тема 4.2. *Площина та пряма у просторі* – 2 год.

Рівняння площини у просторі (рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора; загальне рівняння площини; рівняння площини, що проходить через три точки). Кут між двома площинами та умови паралельності і перпендикулярності двох площин. Канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, яка проходить через дану точку паралельно до даного вектора). Пряма як перетин двох площин у просторі (загальне рівняння). Кут між двома прямими у просторі, умови їх паралельності та перпендикулярності. Кут між прямою і площиною у просторі.

Література [1]: с. 52–59 або [2]: с. 30–39.

Тема 4.3. *Криві (лінії) другого порядку на площині* – 4 год.

Коло, канонічні рівняння еліпса, гіперболи і параболі (дослідження їх форми, характеристики). Загальне рівняння лінії другого порядку на площині, його зведення до канонічного вигляду.

Література [1]: с. 46–52 або [2]: с. 26–30 або [3]: 54–68 або [6]: с. 48–56.

РОЗДІЛ 5. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 5.1. *Функціональна залежність* – 2 год.

Поняття функції однієї змінної, область визначення та область значень функції. Способи задання функції, та їх класифікація. Складні, взаємно обернені і неявні функції. Загальні властивості функцій. Клас елементарних функцій. Побудова графіків функцій.

Література [3]: с. 75–100.

Тема 5.2. *Числові послідовності* – 2 год.

Поняття числової послідовності та її границі. Загальні властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Існування границі монотонної обмеженої послідовності. Граничний перехід при арифметичних операціях над послідовностями. Число e , натуральні логарифми.

Література [1]: с. 65–67 або [2]: с. 46–53 або [5]: с. 82–101.

Тема 5.3. *Границя і неперервність функції* – 4 год.

Означення границі функції в точці. Односторонні границі функції однієї змінної. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх порівняння. Властивості збіжних у точці функцій: обмеженість функції в околі точки збіжності, дії над збіжними функціями. Еквівалентні функції, їх використання при знаходженні границі відношення функцій. Перша і друга визначні границі. Таблиця найважливіших границь. Знаходження границь степенево-показникових функцій. Неперервність функції. Визначення та класифікація точок розриву. Кусково-неперервні функції.

Література [6]: с. 82–107.

РОЗДІЛ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 6.1. *Диференціальне числення* – 2 год.

Поняття похідної функції, геометричний зміст похідної. Таблиця похідних. Основні методи обчислення похідних. Похідна складної та неявної функції. Диференціал функції. Похідні вищих порядків. Поняття невизначених виразів. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя для розкриття невизначеностей. Формула Тейлора.

Література [1]: с. 74–90 або [2]: с. 67–87 або [5]: с. 132–151.

Тема 6.2. *Дослідження поведінки функції за допомогою похідних та побудова її графіку* – 4 год.

Ознаки зростання та спадання функції. Точки локального екстремуму. Достатні умови екстремуму функції, що виражаються через першу і другу похідні функції. Найбільше та найменше значення функції на проміжку.

Випуклість кривої. Точки перегину. Асимптоти графіка функції та їх знаходження. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Література [1]: с. 90–97 або [2]: с. 87–90 або [6]: с. 108–142.

РОЗДІЛ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 7.1. *Частинні похідні* – 2 год.

Поняття функції декількох змінних. Частинні похідні і техніка диференціювання функції двох незалежних змінних. Диференціал функції. Похідна за напрямком. Градієнт функції.

Література [1]: с. 132–140 або [2]: с. 107–111 або [5]: с. 237–259.

Тема 7.2. *Локальний екстремум функції багатьох змінних і його необхідні умови* – 2 год.

Поняття про емпіричні формули. Метод найменших квадратів (МНК). Поняття умовного екстремуму функції багатьох змінних. Метод невизначених множників Лагранжа розв’язування задач на умовний екстремум.

Література [1]: с. 140–147 або [6]: с. 162–178.

РОЗДІЛ 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Тема 8.1. *Невизначений інтеграл* – 4 год.

Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Табличні інтеграли. Методи інтегрування: заміною змінної, частинами. Лінійність інтегрування. Інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій; раціоналізуючі підстановки.

Література [1]: с. 97–103 або [2]: с. 90–99 або [5]: с. 259–280.

Тема 8.2. *Визначений інтеграл, його властивості, обчислення й застосування* – 4 год.

Означення визначеного інтегралу. Геометричний зміст визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла: перестановка меж інтегрування, адитивність відносно меж інтегрування, лінійність інтегрування. Інтегрування заміною змінної і частинами у визначеному інтегралі. Розв’язування геометричних задач за допомогою визначених інтегралів. Поняття про *невластиві інтеграли*. Інтеграл по нескінченному проміжку. Поняття про *кратні інтеграли*. Означення кратного інтегралу. Властивості кратного інтегралу та інтегрованих функцій багатьох змінних. Зведення кратного інтегралу до повторних інтегралів.

Література [1]: с. 103–113 або [2]: с. 99–107 або [5]: с. 280–318 або [6]: с. 143–162.

РОЗДІЛ 9. РЯДИ

Тема 9.1. Числові ряди – 4 год.

Означення числового ряду та його суми. Прогресії. Необхідна умова збіжності, критерій Коші збіжності числового ряду. Гармонічний ряд, його розбіжність. Достатні умови збіжності рядів з додатними членами. Ознака Д'Аламбера. Радикальна інтегральна ознака Коші. Знакозмінні числові ряди, абсолютна та умовна збіжність. Знакопочережні ряди, ознака збіжності Лейбніца.

Література [1]: с. 116–120 або [2]: с. 120–125 або [5]: с. 339–360.

Тема 9.2. Функціональні та степеневі ряди – 4 год.

Поняття функціональної послідовності та функціонального ряду. Означення степеневому ряду, теорема Абеля про його збіжність. Радіус та інтервал збіжності степеневому ряду, формули їх обчислення. Ряди і елементарні функції. Ряд Маклорена. Деякі застосування степеневих рядів.

Література [1]: с. 120–130 або [5]: с. 360–380 або [6]: с. 179–193.

РОЗДІЛ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 10.1. Диференціальні рівняння першого порядку – 2 год.

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку; частинний та загальний розв'язки. Рівняння з відокремленими та відокремлюючими змінними. Диференціальні рівняння, які зводяться до рівняння з відокремлюваними змінними. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Література [1]: с. 156–162 або [3]: с. 332–352 або [5]: с. 318–329.

Тема 10.2. Диференціальні рівняння вищих порядків – 4 год.

Поняття диференціального рівняння 2-го порядку та його частинного і загального розв'язків. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку: загальний і частинний розв'язки. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Література [1]: с. 162–167 або [2]: с. 115–120 або [6]: с. 193–205.

II. НАЗВА ТА ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1 – 2 год.

Тема 1.1. *Місце і роль математики посеред інших наук*

Мета. Ознайомлення з основними етапами розвитку, предметом та роллю математики в розвитку цивілізації. Ознайомлення зі структурою курсу.

Практичне заняття № 2 – 2 год.

Тема 1.2. *Елементи математичної логіки*

Мета. Виробити практичні навички застосування методу математичної індукції для доведення різних тверджень; застосування основних понять комбінаторики для розв'язування практичних задач.

Практичне заняття № 3 – 2 год.

Тема 1.3. *Множини*

Мета. Виробити практичні навички та вміння виконувати операції об'єднання, перетину, різниці та доповнення множин.

Практичне заняття № 4 – 2 год.

Тема 1.4. *Комплексні числа та дії з ними*

Мета. Виробити практичні навички та вміння додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до натурального степеня комплексних чисел в алгебраїчній формі; геометричного зображення комплексного числа, знаходження його модуля та аргументу й запису у тригонометричній формі; множення, ділення, піднесення до натурального степеня комплексних чисел і добування кореня з комплексного числа у тригонометричному вигляді.

Практичне заняття № 5 – 2 год.

Тема 2.1. *Матриці та дії над ними*

Мета. Навчити студентів виконувати дії з матрицями.

Тема 2.2. *Визначники квадратних матриць, методи їх обчислення та властивості*

Мета. Навчити студентів обчислювати визначники квадратних матриць.

Практичне заняття № 6 – 2 год.

Тема 2.3. *Знаходження оберненої матриці. Ранг матриці*

Мета. Навчити студентів знаходити обернену матрицю та розв'язувати матричні рівняння. Знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень.

Практичні заняття № 6, 7 – 4 год.

Тема 2.4. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь*

Мета. Виробити практичні навички розв'язування системи n -лінійних рівнянь з n -невідомими за правилом Крамера; методом оберненої матриці; методом Гауса; дослідження сумісності системи лінійних рівнянь.

Практичні заняття № 8, 9 – 4 год.

Тема 3.1. *Вектори на площині й в просторі та дії з ними*

Мета. Виробити практичні навички: виконувати додавання і віднімання векторів геометричними та аналітичними способами; обчислювати довжину, напрямні косинуси і проекції вектора на осі координат і на довільну вісь; обчислювати скалярний добуток векторів і кут між векторами; обчислювати векторний та змішаний добуток векторів.

Практичне заняття № 10 – 2 год.

Тема 3.2. *Лінійний векторний простір*

Мета. Ознайомити з поняттям базису тримірного простору, навчити обчислювати координати вектора в базисі

Практичне заняття № 11 – 2 год.

Тема 4.1. *Пряма на площині*

Мета. Виробити практичні навички та вміння складати рівняння прямої за різними способами її задання; визначати кут між прямими та відстань від точки до прямої.

Тема 4.2. *Площина і пряма у просторі*

Мета. Виробити практичні навички та вміння: складати канонічне рівняння площини у просторі; визначати кут між двома площинами і складати рівняння площини за різними її розміщеннями по відношенню до іншої площини; зводити рівняння прямої, заданої перетином двох площин, до канонічного вигляду; визначати точку перетину прямої і площини.

Практичне заняття № 12 – 2 год.

Тема 4.3. *Лінії другого порядку на площині*

Мета. Виробити практичні навички та вміння складати канонічні рівняння ліній 2-го порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи.

Практичні заняття № 13, 14 – 4 год.

Тема 5.1. *Поняття функції. Функціональна залежність*

Мета. Сформулювати уявлення про функцію як математичну модель реальних процесів; сформулювати вміння задавати формулами залежності, які відображають реальні процеси. Виробити практичні навички та вміння

знаходити область визначення й область значень функцій, заданих різними способами.

Практичне заняття № 15 – 2 год.

Тема 5.2. Числові послідовності

Мета. Навчити студентів обчислювати границі числових послідовностей.

Практичні заняття № 16, 17 – 4 год.

Тема 5.3. Границя і неперервність функції

Мета. Поглибити теоретичні знання з поняття границі функції і виробити практичні навички та вміння: обчислювати границі найпростіших функцій; обчислювати односторонні границі функцій; визначати область неперервності та геометричне місце точок розриву функції.

Практичне заняття № 18 – 2 год.

Тема 6.1. Похідна функції, її практичний зміст і правила диференціювання

Мета. Виробити практичні навички і вміння обчислювати похідні найпростіших функцій на основі означення похідної функції; обчислювати похідні суми, різниці, добутку і частки функцій; розкривати невизначеності за правилом Лопітала.

Практичні заняття № 19, 20 – 4 год.

Тема 6.2. Застосування похідної функції

Мета. Виробити практичні навички і вміння обчислювати похідні складних функцій; диференціал 1-го порядку; обчислювати похідні та диференціали вищого порядку.

Тема 6.3. Дослідження функцій за допомогою похідних

Мета. Виробити практичні навички й вміння визначати інтервали зростання і спадання функції; досліджувати екстремум функції; знаходити точки перегину та інтервали випуклості графіку функції; визначати найбільше й найменше значення функції на проміжку; знаходити асимптоти графіку функції; проводити повне дослідження функції та зображати ескіз її графіку.

Практичні заняття № 21, 22 – 4 год.

Тема 7.1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Мета. Виробити практичні навички й вміння визначати та геометрично зображати область визначення функцій 2-х змінних; обчислювати найпростіші границі функцій багатьох змінних; обчислювати частинні і

повний прирости функції; обчислювати частинні похідні та повний диференціал функції,

Тема 7.2. Екстремум функції багатьох змінних

Мета. Виробити практичні навички й вміння досліджувати та визначати локальний екстремум функцій 2-х і 3-х змінних, знаходити умовний екстремум функцій багатьох змінних.

Практичні заняття № 23, 24 – 4 год.

Тема 8.1. Невизначений інтеграл, його властивості і методи обчислення

Мета. Виробити практичні навички й вміння обчислювати невизначений інтеграл шляхом зведення його до табличних інтегралів елементарними перетвореннями і на підставі властивостей; обчислювати невизначений інтеграл за допомогою підстановки й за допомогою формули інтегрування частинами; обчислювати інтеграл від найпростіших раціональних дробів, а також інтеграли від ірраціональних і тригонометричних функцій.

Практичні заняття № 25, 26 – 4 год.

Тема 8.2. Визначений інтеграл, його властивості, методи обчислення та застосування

Мета. Поглибити теоретичні знання, виробити практичні навички та вміння обчислювати визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца і на підставі властивостей інтеграла; обчислювати інтеграл методом підстановки й за формулою інтегрування частинами; застосовувати інтеграл для обчислення площ криволінійних трапецій та для обчислення об'єму тіла обертання.

Практичне заняття № 27 – 2 год.

Тема 8.3. Невластиві та кратні інтеграли

Мета. Поглибити теоретичні знання, виробити практичні навички обчислення і дослідження збіжності невластивих інтегралів першого та другого типів. Навчитись обчислювати подвійні інтеграли.

Практичні заняття № 28, 29 – 4 год.

Тема 9.1. Числові ряди та їхня збіжність

Мета. Виробити практичні навички та вміння дослідження збіжності числових рядів за ознаками порівняння, Д'Аламбера, Коші та за інтегральною ознакою; досліджувати абсолютну та умовну збіжність знакопозначеного ряду.

Практичні заняття № 30, 31 – 4 год.

Тема 9.2. Функціональні та степеневі ряди

Мета. Виробити практичні навички визначення радіусу та інтервалу збіжності степеневого ряду; розклад функцій у степеневі ряди; застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Практичне заняття № 32 – 2 год.

Тема 10.1. *Диференціальні рівняння 1-го порядку*

Мета. Виробити практичні навички й вміння розв'язувати рівняння з відокремлюваними змінними; розв'язувати однорідні та лінійні рівняння 1-го порядку.

Практичні заняття № 33, 34 – 4 год.

Тема 10.2. *Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку*

Мета. Поглибити теоретичні знання з рівнянь вищого порядку й виробити практичні навички та вміння розв'язувати лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами; розв'язувати лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку методом варіації сталих; розв'язувати лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

ІІІ. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Вивчення дисципліни “Вища математика” передбачає самостійну підготовку студентами навчальних матеріалів до лекційних та практичних занять, виконання домашніх навчальних завдань з тем курсу. Крім того, згідно з програмою дисципліни, окремі питання і навіть теми студенти вивчають цілком самостійно. Самостійна робота є основною формою навчання студента заочної форми навчання.

3.1. Форми самостійної роботи студентів

1. Організаційно-методична робота в бібліотеці. Конспектування літератури згідно з тематичним планом. Опрацювання підручників та навчальних посібників, монографій, енциклопедій та словників.
2. Опрацювання лекційного матеріалу. Підготовка до практичних занять.
3. Самостійне вивчення окремих тем і питань на основі рекомендованої літератури.
4. Виконання індивідуальних контрольних розрахунково-графічних робіт.
5. Підготовка до модульного (рубіжного) контролю.
6. Підготовка до заліку та екзамену з навчального курсу.
7. Студент може розраховувати на консультацію викладача з конкретних питань, відповіді на які він не може знайти (незрозумілість термінів, формулювань тощо). Але треба розуміти, що консультація викладача буде ефективною тільки за умови систематичної самостійної роботи.

3.2. Контрольні роботи

Студент виконує той варіант контрольної роботи, який співпадає з останньою цифрою учбового шифру його залікової книжки (номеру студентського квитка). При цьому, якщо передостання цифра учбового шифру є число непарне (1,3,5,7,9), то номери задач для відповідного варіанта наведені в таблиці 2.1. Якщо передостання цифра шифру є число парне або нуль (2,4,6,8,0), то номери задач наведені в таблиці 2.2.

Матеріал роботи умовно розбитий на два блоки та вміщує 15 задач, що відповідає першому і другому семестрам вивчення дисципліни. У першому семестрі в контрольну роботу треба включити лише перші шість задач, а наступні дев'ять задач – це матеріал для контрольної роботи у другому семестрі.

Треба враховувати, що у відповідних номерах задач є кілька підпунктів (а, б, в...). Вони виконуються всі, якщо конкретний вибір не упереджений викладачем.

Студент допускається до заліку чи іспиту з дисципліни тільки при наявності зарахованої контрольної роботи.

Таблиця 2.1

№ варіанта	<i>Номери задач для контрольної роботи</i>														
1	1	11	2	31	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
2	2	12	22	32	52	62	72	82	92	102	112	122	132	142	152
3	3	13	23	33	53	63	73	83	93	103	113	123	133	143	153
4	4	14	24	34	54	64	74	84	94	104	114	124	134	144	154
5	5	15	25	35	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155
6	6	16	26	36	56	66	76	86	96	106	116	126	136	146	156
7	7	17	27	37	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	157
8	8	18	28	38	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148	158
9	9	19	29	39	59	69	79	89	99	109	119	129	139	149	159
10	10	20	30	40	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160

Таблиця 2.2

№ варіанта	<i>Номери задач для контрольної роботи</i>														
1	5	12	23	41	55	64	75	86	97	108	119	121	136	146	156
2	6	13	24	42	56	65	76	87	98	109	120	122	137	147	157
3	7	14	25	43	57	66	77	88	99	110	111	123	138	148	158
4	8	15	26	44	58	67	78	89	100	101	112	124	139	149	159
5	9	16	27	45	59	68	79	90	91	102	113	125	140	150	160
6	10	17	28	46	60	69	80	81	92	103	114	126	131	141	151
7	1	18	29	47	51	70	71	82	93	104	115	127	132	142	152
8	2	19	30	48	52	63	72	83	94	105	116	128	133	143	153
9	3	20	21	49	53	62	73	84	95	106	117	129	134	144	154
10	4	11	22	50	54	61	74	85	96	107	118	130	135	145	155

3.3. Методичні вказівки щодо виконання контрольних робіт

1. Робота повинна бути виконана в шкільному зошиті з широкими полями для зауважень викладача.
2. На обгортці зошита треба вказати прізвище, ім'я та по батькові (повністю), спеціалізацію, назву дисципліни, номер варіанту.
3. Перед розв'язуванням кожної задачі треба привести повністю її умову.
4. При розв'язуванні задач треба додержуватись тієї послідовності, в якій вони вказані в завданні, строго зберігаючи нумерацію задач.
5. Розв'язок задач повинен супроводжуватись поясненнями, а кінцеві результати треба виділяти.
6. У кінці роботи треба привести список використаної літератури.
7. Після одержання перевіреної викладачем роботи студент повинен у цьому ж зошиті зробити роботу над помилками (виправити всі зазначені помилки й недоліки). Вносити виправлення в сам текст роботи після її рецензування забороняється.

3.4. Завдання для виконання контрольних розрахунково-графічних робіт

1. У задачах 1–10 систему рівнянь розв'язати методом Гаусса та за допомогою правила Крамера. Записати систему рівнянь в матричній формі та розв'язати її за допомогою оберненої матриці:

$$1. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \\ x - y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y - 4z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - 2y - z = -5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 4y + 2z = -5 \\ 4x + y - 3z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y - z = -7 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y - 3z = 9 \\ x + y + 2z = 12 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x + y + 2z = 9 \\ -3x + 5y + 4z = -5 \\ x - 2y + z = 12 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2. У задачах 11–20 дані координати точок A, B, C . Знайти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 3\vec{AB} + \vec{BC}$;

б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b} = \vec{AC}$;

в) рівняння площини, яка проходить через три заданих точки;

г) рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно вектору $\vec{AB}$.

11. $A(7;-4;1), \quad B(12;-3;1), \quad C(10;1;5).$

12. $A(0;-3;3), \quad B(5;-2;3), \quad C(3;2;7).$

13. $A(-2;-1;-2), \quad B(3;0;-2), \quad C(1;4;2).$

14. $A(-6;0;0), \quad B(-1;1;0), \quad C(-3;5;4).$

15. $A(-2;-3;-8), \quad B(3;-2;-8), \quad C(1;2;-4).$

16. $A(1;0;-1), \quad B(6;1;-1), \quad C(4;5;3).$

17. $A(-1;4;1), \quad B(4;5;1), \quad C(2;9;5).$

18. $A(3;-6;-3), \quad B(8;-5;-3), \quad C(6;-1;1).$

19. $A(1;0;0), \quad B(6;1;0), \quad C(4;5;10).$

20. $A(2;-8;-2), \quad B(7;-7;-2), \quad C(5;-3;2).$

3. У задачах 21–30 задані вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{b}$. Показати, що зокрема вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис тримірного простору, та знайти координати вектора $\bar{b}$ в цьому базисі.

21. $\bar{e}_1 (2;1;3), \bar{e}_2 (3;-2;1), \bar{e}_3 (1;-3;-4), \bar{b} (7;0;7).$
22. $\bar{e}_1 (5;3;1), \bar{e}_2 (-2;-1;2), \bar{e}_3 (-2;1;4), \bar{b} (3;0;1).$
23. $\bar{e}_1 (1;3;5), \bar{e}_2 (-2;-1;-1), \bar{e}_3 (4;-2;4), \bar{b} (-7;3;-1).$
24. $\bar{e}_1 (3;1;6), \bar{e}_2 (-2;2;-3), \bar{e}_3 (-4;5;-1), \bar{b} (3;0;1).$
25. $\bar{e}_1 (4;1;4), \bar{e}_2 (-2;-1;1), \bar{e}_3 (3;1;5), \bar{b} (-3;-2;1).$
26. $\bar{e}_1 (1;2;5), \bar{e}_2 (2;-3;4), \bar{e}_3 (1;-1;-2), \bar{b} (3;0;1).$
27. $\bar{e}_1 (5;1;2), \bar{e}_2 (3;4;-1), \bar{e}_3 (-4;2;1), \bar{b} (-3;5;4).$
28. $\bar{e}_1 (2;1;5), \bar{e}_2 (-4;3;5), \bar{e}_3 (1;-1;-4), \bar{b} (4;-1;-3).$
29. $\bar{e}_1 (3;1;4), \bar{e}_2 (-4;2;3), \bar{e}_3 (2;-1;-2), \bar{b} (7;-1;0).$
30. $\bar{e}_1 (1;4;2), \bar{e}_2 (5;-2;-3), \bar{e}_3 (-2;-1;1), \bar{b} (-3;2;4).$

4. У задачах 31–50 трикутник ABC заданий координатами своїх вершин. Потрібно:

- а) виконати рисунок і написати рівняння сторони AB ;
- б) написати рівняння висоти CD і обчислити її довжину $h = |CD|$;
- в) написати рівняння медіани AM і рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB ;
- г) рівняння кола, для якого висота CD є діаметром;
- д) систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник ABC .

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 31. $A(-5;0), B(7;9), C(5;-5).$ | 41. $A(-5;2), B(7;-7), C(5;7).$ |
| 32. $A(-7;2), B(5;11), C(3;-3).$ | 42. $A(-7;5), B(5;-4), C(3;10).$ |
| 33. $A(-5;-3), B(7;6), C(5;-8).$ | 43. $A(-7;1), B(5;-8), C(3;6).$ |
| 34. $A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7).$ | 44. $A(0;3), B(12;-6), C(10;8).$ |
| 35. $A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9).$ | 45. $A(-8;4), B(4;-5), C(2;9).$ |
| 36. $A(0;-1), B(12;8), C(10;-6).$ | 46. $A(-2;2), B(10;-7), C(8;7).$ |
| 37. $A(-6;1), B(6;10), C(4;-4).$ | 47. $A(1;2), B(13;-7), C(11;7).$ |
| 38. $A(-2;-4), B(10;5), C(8;-9).$ | 48. $A(4;-1), B(13;-7), C(6;6).$ |
| 39. $A(-3;0), B(9;9), C(7;-5).$ | 49. $A(-7;-1), B(-5;-10), C(3;4).$ |
| 40. $A(-9;-2), B(3;7), C(1;-7).$ | 50. $A(-3;3), B(9;-6), C(7;8).$ |

5. У задачах 21–30 вказати тип кривої і побудувати її графік.

- | | |
|--|----------------------------|
| 51. $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0;$ | 56. $3x^2 - 6y - 6x = 0;$ |
| 52. $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0;$ | 57. $3x + 2y^2 + 8y = 0;$ |
| 53. $2x^2 - 4x + 4y^2 + 8y + 1 = 0;$ | 58. $3x - 3y^2 - 12y = 0;$ |

$$54. \quad 2x^2 - 4x - 4y^2 + 8y + 1 = 0;$$

$$55. \quad 2x^2 - 4x - 4y^2 + 8y - 3 = 0;$$

$$59. \quad 3x^2 - 12x + 2y^2 + 12y = 0;$$

$$60. \quad 3x^2 + 8y - 12x = 0.$$

6. У задачах 61–70 знайти вказані границі

61.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 3x - 10}{4x^3 - 8x^6};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5);$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + x + x^2)}{(e^{2x} - 1)^2};$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

62.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x + 9x^3}{x^2 + 3x - 2};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{3}{8 - x^3} \right);$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

63.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2 - 3x};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 2x}{2x - 6};$$

$$в) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n});$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

64.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x^2 - 5};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2};$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x + 1}}{x + 2}.$$

65.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right);$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x+1}.$$

66.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi^2 - x^2};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-1}};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{5x+7};$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

67.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{\frac{2x}{5}};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right);$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9};$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}.$$

68.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4};$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{4x^3 + 3x - 6}.$$

69.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 2}));$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right);$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

70.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2};$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 7x^2 + 5x - 4}{x^4 + x^2 + x + 1};$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3} \right)^x;$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

7. У задачах 71–80 знайти похідні функції.

71. а) $y = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + e^{5x}$; б) $y = e^{x - \arcsin x}$; в) $x^3 y^3 - 2xy + 3 = 0$.

72. а) $y = \ln \frac{x^2}{x+1} + 3x^3 \sqrt{x}$; б) $y = 2^{\arctg x - x^2}$; в) $x^2 y^2 - \cos x = 0$.

73. а) $y = x^2 + x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = 2^{\arcsin \frac{1}{x}}$; в) $\cos(xy) - 2x = 0$.

74. а) $y = \ln \frac{(x-1)^2}{x+2} + 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = 2^{\frac{4}{\sin x}}$; в) $\frac{x}{y} + xy - 2 = 0$.

75. а) $y = \ln \frac{x^2}{x-1} + 4x^4 \sqrt{x}$; б) $y = (e^{\sin x} + 3x)^3$; в) $5x^2 y^2 - 7y + 4 = 0$

76. а) $y = x^3(3 \ln x - 1) - \frac{x+1}{e^x}$; б) $y = (5^{\operatorname{tg} 2x} + 3)^4$; в) $x^3 y^3 - 2xy + 1 = 0$.

77. а) $y = \ln \frac{(x+1)^2}{x+3} + 3x^3 \sqrt{x}$; б) $y = 5^{\arcsin x^2}$; в) $x^2 + xy + y^2 = 3$.

78. а) $y = e^{5x}(5x-1) - \frac{2 \ln x + 1}{x^2}$; б) $y = 4^{\arctg \frac{3}{x}}$; в) $x^2 + y^2 - xy = 0$.

79. а) $y = \ln \frac{(x+1)^2}{x-2} + 4\sqrt[4]{x^3}$; б) $y = 2^{\sin \frac{3}{x}}$; в) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

80. а) $y = x(\ln x - 1) + e^{3x}(3x-1)$; б) $y = 3^{\cos^2 4x}$; в) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

8. У задачах 81–90 дослідження функцій рекомендується провести за наступною схемою:

- а) знайти область визначення функції $y=f(x)$;
- б) дослідити функцію на парність, непарність та періодичність;
- в) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- г) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву (якщо вони існують) та встановити характер розриву; знайти асимптоти кривої $y=f(x)$;
- д) знайти інтервали зростання і спадання функції та її екстремуми;
- е) знайти інтервали випуклості та вогнутості кривої та точки її перегину;
- є) побудувати графік функції.

81. а) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{\ln x - 1}{x}$. 86. а) $y = \frac{(x-1)^2}{x}$; б) $y = x \cdot e^x$.

82. а) $y = \frac{x}{2} e^{-x+1}$; б) $y = x + \frac{2}{x}$. 87. а) $y = \frac{x}{2 - x^2}$; б) $y = \ln \frac{x}{x-1}$.

83. а) $y = \frac{x^2}{x+1}$; б) $y = \ln(x^2 - 4)$. 88. а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \ln(x^2 + 1)$.
84. а) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$; б) $y = (x+1)e^{-x}$. 89. а) $y = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; б) $y = x \cdot e^{-x}$.
85. а) $y = x + \frac{4}{x}$; б) $y = x \ln x$. 90. а) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{1}{e^x - 1}$.

9. У задачах 91–95 дослідити на екстремум функцію $z=f(x,y)$

91. $z = 3x + 3y - x^2 - xy - y^2 + 6$;
 92. $z = 7x + 8y - x^2 - xy - y^2 - 10$;
 93. $z = 8x - 4y + x^2 - xy + y^2 + 15$;
 94. $z = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12$;
 95. $z = 2x - 8y - x^2 - y^2 - 9$.

У задачах 96–97 відшукайте найменше та найбільше значення функції $z=f(x,y)$ в даній замкненій області.

96. $z = x^2 + xy - 6x - 2y + 2$ в прямокутнику $1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4$.
 97. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 5$ в трикутнику, обмеженому осями Ox і Oy та прямою $y=2x$.
 98. $z = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 15$ в прямокутнику $2 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 5$.
 99. $z = x^2 - 2xy + 4x - 4y + 7$ в області, обмеженій параболою $y = -x^2 - 4x$.
 100. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y + 2$ в квадраті $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

10. У задачах 101–110 знайти повний диференціал першого порядку $df(x,y)$ та частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функцій:

101. $z = \sin(x^2 - 2y^3)$; 106. $z = \operatorname{tg}(y^2 - 2x^3)$;
 102. $z = \ln(x^2 + e^{-2y})$; 107. $z = \cos(e^{-x} + y^2)$;
 103. $z = \sqrt[3]{2x^3 - \ln y}$; 108. $z = \ln(x^2 - \sin y)$;
 104. $z = \operatorname{tg}(y^3 - 3x^2)$; 109. $z = \sqrt{2x^3 - \sin y}$;
 105. $z = 2^{3y-2x^2}$; 110. $z = e^{\sin 2x + y^3}$.

11. У задачах 111–120 знайти вказані невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням.

$$\begin{array}{lll}
111. & a) \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx; & б) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{e^x + 5}} dx; & в) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \\
112. & a) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx; & б) \int \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}; & в) \int x \sin 2x dx. \\
113. & a) \int \frac{2x+5}{x^2+5x-7} dx; & б) \int \frac{dx}{3\cos x + 2}; & в) \int \ln(2-x^2) dx. \\
114. & a) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}; & б) \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx; & в) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx. \\
115. & a) \int \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx; & б) \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2} dx; & в) \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx. \\
116. & a) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; & б) \int \frac{x^2}{\sqrt{2-3x^3}} dx; & в) \int e^{\sqrt{x}} dx. \\
117. & a) \int \frac{x^2-9}{x^2-8} dx; & б) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{3+e^x}} dx; & в) \int \sin \sqrt[3]{x} dx. \\
118. & a) \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx; & б) \int \frac{3-x}{(2x+3)^9} dx; & в) \int x \cos 3x dx. \\
119. & a) \int \frac{4+3x^2}{x^2(4+x^2)} dx; & б) \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}; & в) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx. \\
120. & a) \int e^{-x^2} x dx; & б) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}; & в) \int e^x \cos x dx.
\end{array}$$

12. У задачах 121–130 обчислити площу фігури, обмеженої вказаними лініями. Зробити креслення.

$$\begin{array}{ll}
121. & y = x^3, x = 1, x = 3, y = 0; \\
122. & y = (x-2)^2 - 1, y = -(x-2)^2 + 1; \\
123. & y = 1/x, y = 0, x = 1, x = 2; \\
124. & y = \sqrt{x}, y = x^3; \\
125. & y = x^2, y = 2x - x^2; \\
126. & y = 1/x^2, y = 0, x = 1, x = 5; \\
127. & y = \sqrt{x}, x + y = 2, x = 0; \\
128. & y = 6 - x - x^2, y = 0; \\
129. & y = -x, y = 2x - x^2; \\
130. & y = 2x - x^2, y = 0.
\end{array}$$

13. У задачах 131–140 обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001 шляхом розкладу підінтегральної функції в ряд та почленного інтегрування цього ряду.

$$131. \int_0^{0.5} \frac{n(1+x^2)}{x} dx;$$

$$132. \int_0^{0.5} e^{-4x^2} dx;$$

$$133. \int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx;$$

$$134. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx;$$

$$135. \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};$$

$$136. \int_0^{0.1} \cos(10x^2) dx;$$

$$137. \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$138. \int_0^{0.5} \cos(2x^2) dx;$$

$$139. \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx;$$

$$140. \int_0^{0.3} e^{-2x^3} dx.$$

14. У задачах 141–150 дано степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n (2n+3)}$. При заданих значеннях a та b написати перші три члени ряду, знайти інтервал збіжності ряду та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

$$141. a = 2; b = 3.$$

$$142. a = 3; b = 5$$

$$143. a = 4; b = 7.$$

$$144. a = 5; b = 9.$$

$$145. a = 7; b = 6.$$

$$146. a = 2; b = 5.$$

$$147. a = 3; b = 2.$$

$$148. a = 4; b = 3.$$

$$149. a = 5; b = 2.$$

$$150. a = 6; b = 4.$$

15. В задачах 151–160 знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку.

$$151. \frac{dy}{dx} = ky(N - y)$$

$$152. x^e y' = y \cdot \ln y$$

$$153. x(1+y^2) \cdot dx - y(1+x^2) \cdot dy = 0$$

$$154. x(y^2 + 4) \cdot dx + y \cdot (x^2 + 4) \cdot dy = 0$$

$$155. (x^2 + x) \cdot y' = 2y + 1$$

$$156. (1+x) \cdot y dx + (1-y) \cdot x dy = 0$$

$$157. y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$$

$$158. x dy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \cdot dx = 0$$

$$159. x^2 + y^2 - 2xy \cdot y' = 0$$

$$160. xy + y^2 = (2x^2 + xy) \cdot y'.$$

IV. ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

◆ Приклад 1

Дано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язати систему рівнянь: 1) за формулами Крамера; 2) методом Гаусса.

Розв'язок

$$\text{а) Розв'яжемо квадратну систему } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

1. Якщо визначник системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, ця система сумісна і має єдиний розв'язок, який можна знайти *за формулами Крамера*

$$x_j = \Delta_j / \Delta, \quad j = \overline{(1, n)},$$

де Δ – визначник системи, Δ_j – визначник, який отримано з визначника системи Δ заміною у ньому стовпця коефіцієнтів при x_j стовпцем вільних членів.

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -87 \neq 0.$$

Обчислимо визначники Δ_j , $j = \overline{(1, 3)}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & -3 & 6 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -87; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 17 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 87; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 17 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 10 \end{vmatrix} = -174,$$

тоді $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1$; $x_2 = \Delta_2 / \Delta = -1$; $x_3 = \Delta_3 / \Delta = 2$.

2. **Метод Гаусса** (метод послідовного виключення невідомих) полягає у тому, що з системи послідовно виключаються невідомі x_1, x_2 (прямий хід), далі визначається величина x_3 , а потім визначаються величини x_1, x_2 (обернений хід).

Поділимо обидві частини першого рівняння системи на 2. Отримаємо рівняння $x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 3x_3 = \frac{17}{2}$. Помножимо обидві частини рівняння на -3 та додамо їх до відповідних частин другого рівняння системи. Крім того, помножимо на -1 і додамо до відповідних частин третього рівняння системи. В результаті отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 6 & 17 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 3 & 17/2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 3 & 17/2 \\ 0 & 17/2 & -10 & -57/2 \\ 0 & -7/2 & -1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Поділимо обидві частини другого рівняння системи на $17/2$. після цього помножимо обидві частини отриманого рівняння на $7/2$ та додамо його до третього рівняння системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 3 & 17/2 \\ 0 & 1 & -20/17 & -57/17 \\ 0 & 0 & -174/34 & -348/34 \end{array} \right)$$

Таким чином ми отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 3x_3 = \frac{17}{2}; \\ x_2 - \frac{20}{17}x_3 = -\frac{57}{17}; \\ -\frac{174}{34}x_3 = -\frac{348}{34}. \end{cases}$$

З третього рівняння системи визначаємо, що $x_3=2$. Далі з другого рівняння системи $x_2 = \frac{20}{17}x_3 - \frac{57}{17} = \frac{20}{17}2 - \frac{57}{17} = -1$. І накінець з першого рівняння системи отримаємо $x_1 = \frac{3}{2}x_2 - 3x_3 + \frac{17}{2} = \frac{3}{2}(-1) - 3 \cdot 2 + \frac{17}{2} = 1$.

Отже, розв'язком системи є значення $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

Збіг результатів, отриманих різними методами, свідчить, що система розв'язана вірно. У цьому можна переконатися, якщо виконати перевірку, тобто підставити значення $x_1; x_2; x_3$ в систему.

$$\text{б) Розв'яжемо квадратну систему} \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

1. За формулами Крамера

Визначник знайдемо за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 6(21 + 4) + 7(14 - 8) + 6(-8 - 24) = 0$$

Оскільки визначник дорівнює нулю, то ця система або не сумісна, або сумісна та невизначена. Обчислимо допоміжні визначники Δ_j , $j = (\overline{1,3})$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система рівнянь є сумісною та невизначеною (тобто має нескінченну кількість розв'язків і нам необхідно знайти загальний розв'язок).

2. Метод Гаусса

Здійснемо послідовне виключення невідомих за допомогою рівнозначних перетворень системи:

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 & 6 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 8 & -4 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \sim 2 \begin{pmatrix} 3 & -7 & 6 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 4 & -4 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \sim 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & -7 & 6 & | & 0 \\ 4 & -4 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \sim 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -16 & 3 & | & -3 \\ 0 & -16 & 3 & | & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -16 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином ми отримали систему з двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ -16x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = C$, де C – довільна стала, тоді:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + C = 1; \\ -16x_2 + 3C = -3. \end{cases}$$

Звідки знайдемо загальний розв'язок (із другого рівняння знайдемо $x_2 = \frac{3(1+C)}{16}$ і підставимо його в перше рівняння, звідки визначимо $x_1 = \frac{7-25C}{16}$). При $C=0$, наприклад, опорний розв'язок: $x_1 = \frac{7}{16}$, $x_2 = \frac{3}{16}$. ♦

♦ Приклад 2

За координатами трьох точок $A(2; 1; 6)$, $B(1; -2; 9)$, $C(3; -5; 8)$ знайти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 3\vec{AB} + \vec{BC}$;

б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{v} = \vec{AC}$;

- в) рівняння площини, яка проходить через три заданих точки;
 г) рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

Розв'язок

а) Послідовно знаходимо:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (1 - 2; -2 - 1; 9 - 6) = (-1; -3; 3).$$

$$\overline{BC} = (2; -3; -1).$$

$$3\overline{AB} + \overline{BC} = (-1; -3; 3) + (2; -3; -1) = (-1; -12; 8).$$

$$|3\overline{AB} + \overline{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{209}.$$

б) Маємо $\overline{a} = (-1; -12; 8)$, $\overline{e} = (1; -6; 2)$.

Тоді скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{e} = (-1) \cdot 1 + (-12) \cdot (-6) + 8 \cdot 2 = 87$.

в) Користуючись рівнянням площини, що проходить через три точки заданих координатами

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

запишемо

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 6 \\ 1 - 2 & -2 - 1 & 9 - 6 \\ 3 - 2 & -5 - 1 & 8 - 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 6 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

та розкриваючи його одержимо вираз

$$(x - 2) \cdot (-3) \cdot 2 + (y - 1) \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-6) \cdot (z - 6) - 1 \cdot (-3) \cdot (z - 6) -$$

$$- (-6) \cdot 3 \cdot (x - 2) - (-1) \cdot (y - 1) \cdot 2 = 0;$$

$$- 6(x - 2) + 3 \cdot (y - 1) + 6 \cdot (z - 6) + 3 \cdot (z - 6) + 18 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) = 0;$$

$$- 6x + 12 + 3y - 3 + 6z - 36 + 3z - 18 + 18x - 36 + 2y - 2 = 0.$$

Звідки отримаємо рівняння площини $12x + 5y + 9z - 83 = 0$.

2) Використовуючи рівняння площини

$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A_0, B_0, C_0)$ у нашому випадку маємо:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \rightarrow C(3; -5; 8),$$

$$\overline{n}(A_0, B_0, C_0) \rightarrow \overline{AB}(-1; -3; 3).$$

Тоді рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно вектору $\overline{AB}$ матиме вигляд: $-1(x - 3) - 3(y + 5) + 3(z - 8) = 0$;

$$-x - 3y + 3z - 36 = 0 \Rightarrow x + 3y - 3z + 36 = 0. \spadesuit$$

Будь-яка система n лінійно незалежних векторів n -вимірного простору називається *базисом* цього простору.

Максимальне число лінійно незалежних векторів n -вимірного простору дорівнює n .

Довільний вектор $\overline{X}$ n -вимірного простору задається як лінійна комбінація векторів базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$:

$$\overline{X} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n},$$

де числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються координатами вектора $\overline{X}$ у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$.

◆ Приклад 3

Переконатись, що вектори $\overline{e_1} = (5; 4; 3)$, $\overline{e_2} = (3; -1; 2)$, $\overline{e_3} = (-3; 1; 3)$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\overline{X} = (12; 9; 10)$ у цьому базисі.

Розв'язок

Якщо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, складений з координат векторів

$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, не дорівнює нулю, то вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ лінійно незалежні і, таким чином, утворюють базис тримірного простору. Переконуємось, що $\Delta = -85 \neq 0$. Отже, трійка $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ – базис.

Нехай вектор $\overline{X}$ в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ має координати x_1, x_2, x_3 , тобто $\overline{X} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + x_3 \overline{e_3}$. Для знаходження значень координат x_1, x_2, x_3 маємо $(24; 9; 10) = x_1(5; 4; 3) + x_2(3; -1; 2) + x_3(-3; 1; 3)$ або систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 24, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Її розв'язок становить $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = -1$. І тоді $\overline{X} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - \overline{e_3}$. ♦

♦ Приклад 4

Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(-1; 2), B(4; 5), C(4; -1)$. Потрібно:

- зробити креслення і написати рівняння сторони AB ;
- написати рівняння висоти CD і обчислити її довжину $h = |CD|$;
- написати рівняння медіани AM ;
- написати рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB ;
- написати рівняння кола, для якого висота CD є діаметром;
- написати систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник ABC .

Розв'язок

В системі координат XOY наносимо координати точок A, B, C , з'єднуючи їх одержуємо трикутник (рис. 4.1).

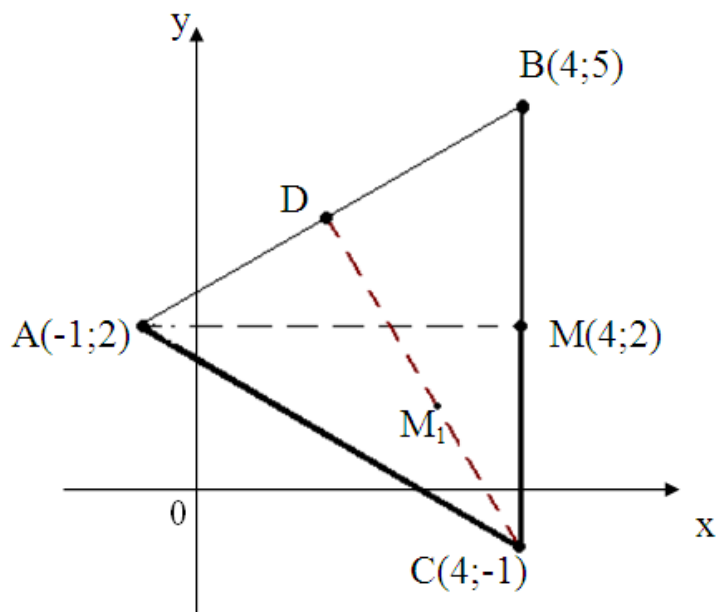


Рис. 4.1. Трикутник ABC , заданий координатами вершин (приклад 4)

а) Рівняння сторони AB запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-2}{5-2} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x - 5y + 13 = 0$
або в формі прямої з кутовим коефіцієнтом

$$5y = 3x + 13 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{5}.$$

б) Кутовий коефіцієнт прямої AB становить $k_1 = \frac{3}{5}$, тоді кутовий коефіцієнт k_2 перпендикуляра CD знаходимо з умови $k_1 \cdot k_2 = -1$:

$$\frac{3}{5}k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{5}{3}.$$

Далі, рівняння висоти CD запишемо як рівняння прямої, що задається точкою $C(4; -1)$ та кутовим коефіцієнтом k_2 :

$$y + 1 = -\frac{5}{3}(x - 4) \Rightarrow \frac{5}{3}x + y - \frac{17}{3} = 0 \Rightarrow 5x + 3y - 17 = 0.$$

Довжину висоти $h = |CD|$ обчислимо як відстань від точки C до прямої AB .
Маємо

$$h = |CD| = \frac{|3 \cdot 4 - 5(-1) + 13|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{30}{\sqrt{34}} \approx 5,15$$

в) Визначимо координати точки M – середини сторони BC :

$$M\left(\frac{4+4}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) \Rightarrow M(4; 2)$$

Тоді рівняння медіани AM запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(-1; 2)$ і $M(4; 2)$. Маємо

$$\frac{x - (-1)}{4 - (-1)} = \frac{y - 2}{2 - 2} \Rightarrow \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{0} \Rightarrow y = 2 \text{ (лінія паралельна осі } OX).$$

г) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB :

$$y - (-1) = \frac{3}{5}(x - 4) \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5},$$

$$y - \frac{3}{5}x + \frac{17}{5} = 0 \Rightarrow 3x - 5y - 17 = 0.$$

д) Визначимо координати точки D :

$$D\left(\frac{-1+4}{2}; \frac{2+5}{2}\right) \Rightarrow D\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow D(1,5; 3,5),$$

а тепер координати точки M_1 :

$$M_1\left(\frac{4+1,5}{2}; \frac{-1+3,5}{2}\right) \Rightarrow M(2,75; 1,25).$$

Тоді, користуючись тим, що половина висоти CD дорівнює радіусу кола і складає $r = \frac{h}{2} = \frac{5,15}{2} \approx 2,57$, запишемо рівняння кола:

$$(x - 2,75)^2 + (y - 1,25)^2 = 2,57^2.$$

е) Запишемо рівняння прямої BC :

$$\frac{x-4}{4-4} = \frac{y-5}{-1-5} \Rightarrow x=4.$$

Запишемо рівняння прямої AC :

$$\frac{x-(1)}{4-(1)} = \frac{y-2}{-1-2} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x+5y-7=0.$$

Тоді система лінійних нерівностей $\begin{cases} 3x-5y+13 > 0, \\ x < 4, \\ 3x+5y-7 > 0. \end{cases}$ визначає трикутник ABC ♦

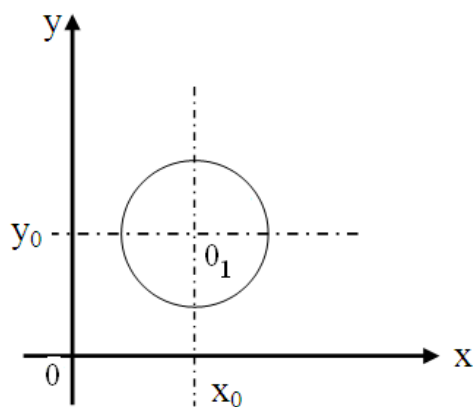
Нехай задано загальне рівняння другої степені зі змінними x та y , в якому не міститься добуток змінних: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + \delta = 0$. Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то це або еліптична крива – еліпс, коло (якщо $A \cdot B > 0$), або гіпербола (якщо $A \cdot B < 0$), або парабола (якщо $A \cdot B = 0$). Для побудови кривої за її рівнянням необхідно виділити повні квадрати відносно кожної змінної x та y , які містяться в рівнянні у другій степені.

Якщо при цьому вихідне рівняння приводиться до вигляду $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ або $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, то це – коло з центром у точці $O_1(x_0; y_0)$ та радіусом r або еліпс з центром у точці $O_1(x_0; y_0)$ і півосями a, b (рис. 4.2).

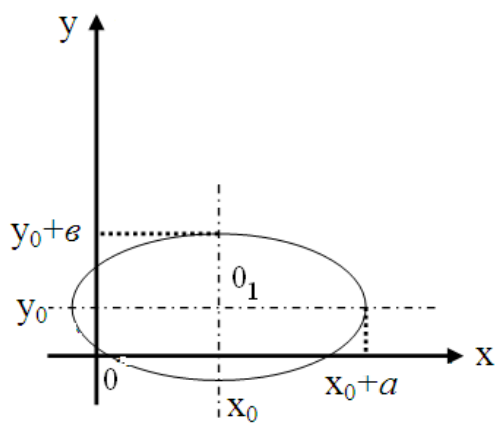
Якщо вихідне рівняння приводиться до виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1,$$

то це – гіпербола (спряжена гіпербола), яка будується поза прямокутником із сторонами $2a$ і $2b$ (центр у точці $(x_0; y_0)$). Діагоналі прямокутника є асимптотами гіпербол (рис. 4.3,а).

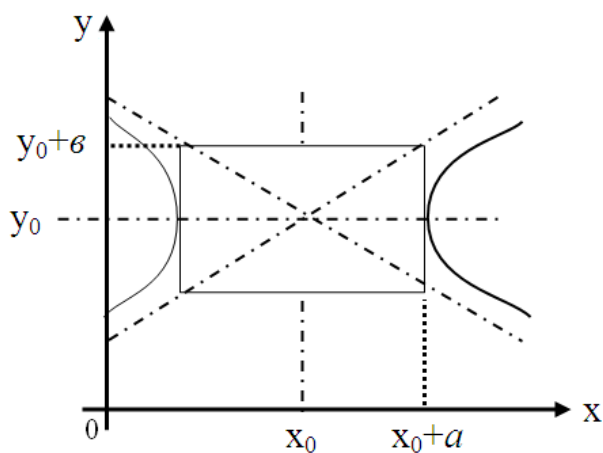


а)

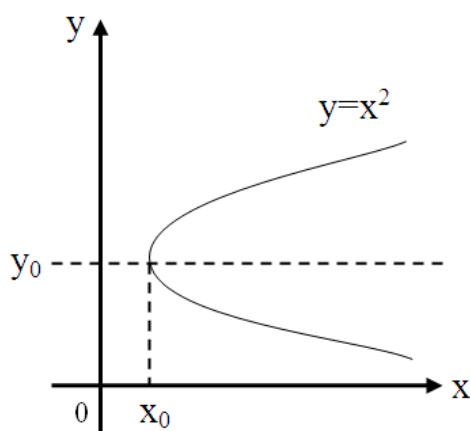


б)

Рис. 4.2. Лінії другого порядку: коло (а), еліпс (б)



а)



б)

Рис. 4.3. Лінії другого порядку: гіпербола (а), парабола (б)

Якщо вихідне рівняння приводиться до вигляду $y - y_0 = 2p(x - x_0)^2$ або $x - x_0 = 2p(y - y_0)^2$, то це – параболи типу $y = \pm x^2$ або $x = \pm y^2$ з вершинами в точці $(x_0; y_0)$ (рис. 4.3,б).

◆ Приклад 5

Встановити вигляд і розміщення кривої $x^2 + 2y^2 - 4x + 16y = 0$.

Розв'язок

Оскільки $A \cdot B = 1 \cdot 2 = 2 > 0$, то це крива еліптичного виду. Доповнюючи доданки з x і y до повного квадрату, отримаємо

$$(x - 2)^2 + 2(y + 4)^2 = 36 \quad \text{або} \quad \frac{(x - 2)^2}{6^2} + \frac{(y + 4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

Покладемо $X = x - 2$; $Y = y + 4$. Маємо $\frac{X^2}{6^2} + \frac{Y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$.

Отже, крива є еліпсом з центром в точці $O(2; -4)$. ♦

♦ Приклад 6а

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + x - 3}$.

Розв'язок

Зауваження. Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

У нашому випадку при $x \rightarrow 1$ маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу та скоротимо їх:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 3} = \frac{1+1+1}{2+3} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

♦ Приклад 6б

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$.

Розв'язок

Зауваження. Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.

У нашому випадку для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ доцільно домножити чисельник та знаменник на вираз спряжений до знаменника. Після скорочення дробу на x скористуємося теоремою про границю частки.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{5-x-5-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}}{-2} = -\sqrt{5} \bullet\end{aligned}$$

◆ Приклад 6в

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{7x^3 - x^2 + 1}$.

Розв'язок

Зауваження. Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x , а потім перейти до границі.

У нашому випадку маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник та знаменник на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{7x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{7 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{7}, \text{ оскільки } \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2} &= 0; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} &= 0; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

◆

◆ Приклад 6г

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$.

Розв'язок

Зауваження. Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу важливу границю чи її наслідки.

Отже скористаємося першою важливою границею: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, а також

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Отже: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \frac{3}{5},$

оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{3x} = 1$, та $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$. ♦

♦ Приклад 6д

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{2x}.$

Розв'язок

Зауваження. В подібних прикладах користуються другою важливою границею $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = |1^\infty| = e$, й іншими формами запису другої важливої

границі: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

а також $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)} \right)^{\varphi(x)} = e$.

Отже, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \right)^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2$. ♦

♦ Приклад 7

Знайти похідні першого порядку для функцій:

1) $y = \frac{5}{x^3} + 8x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt[4]{x} + 9x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3$;

2) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.

Розв'язок

1) $y' = -15x^{-4} + 8 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{3}{4}} + 9 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = -\frac{15}{x^4} + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} + 15 \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

2) $y' = 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \ln 10 \cdot (-4 \sin^3 3x) \cdot 3 \cdot \cos 3x = -12 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \ln 10 \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x$.

♦

◆ Приклад 8

Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язок

1. Область визначення $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$, отже:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Досліджуємо функцію на парність, непарність та періодичність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x),$$

тобто $y=f(x)$ – парна функція. Дана функція не періодична.

3. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Тобто графік функції проходить через початок координат.

4. В точках $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ функція має розрив. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty,$$

то в цих точках маємо розрив другого роду. Тому $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ є вертикальними асимптотами.

Знаходимо інші асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x^2 - 1)x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Таким чином, $y=1$ – горизонтальна асимптота.

5. Знаходимо інтервали зростання та спадання функції та її екстремуми.

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$y' = 0$, якщо $-2x=0$, $x=0$. Таким чином, маємо три критичні точки $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Визначаємо знак похідної на кожному проміжку (рис. 4.4).

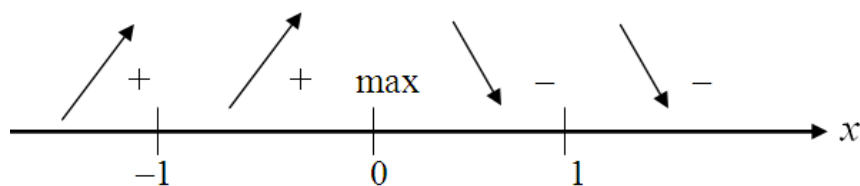


Рис. 4.4. Схема зростання та спадання функції

В точці $x=0$ функція змінює знак з “+” на “-”, тому $x=0$ є точкою максимуму і $y_{\max}=f(0)=0$.

6. Знаходимо інтервали вогнутості, випуклості та точки перегину графіка функції:

$$y'' = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \right) = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)(-2x^2+2+8x^2)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Оскільки $3x^2+1 \neq 0$, то критичними точками другого роду будуть $x_1=-1$ і $x_2=1$. Визначаємо знак другої похідної на отриманих відрізках (рис. 4.5).

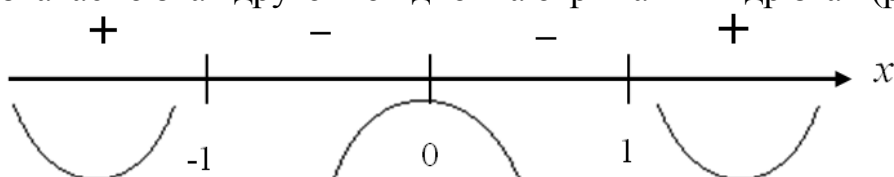


Рис. 4.5. Схема поведінки функції (приклад 8)

Так як при переході через точки $x_1=-1$ і $x_2=1$ друга похідна змінює знак на протилежний, то ці точки є точками перегину.

7. Будуємо графік функції. Спочатку штрихованими лініями наносимо асимптоти, потім точки екстремуму та перегину і сам графік (рис. 4.6).♦

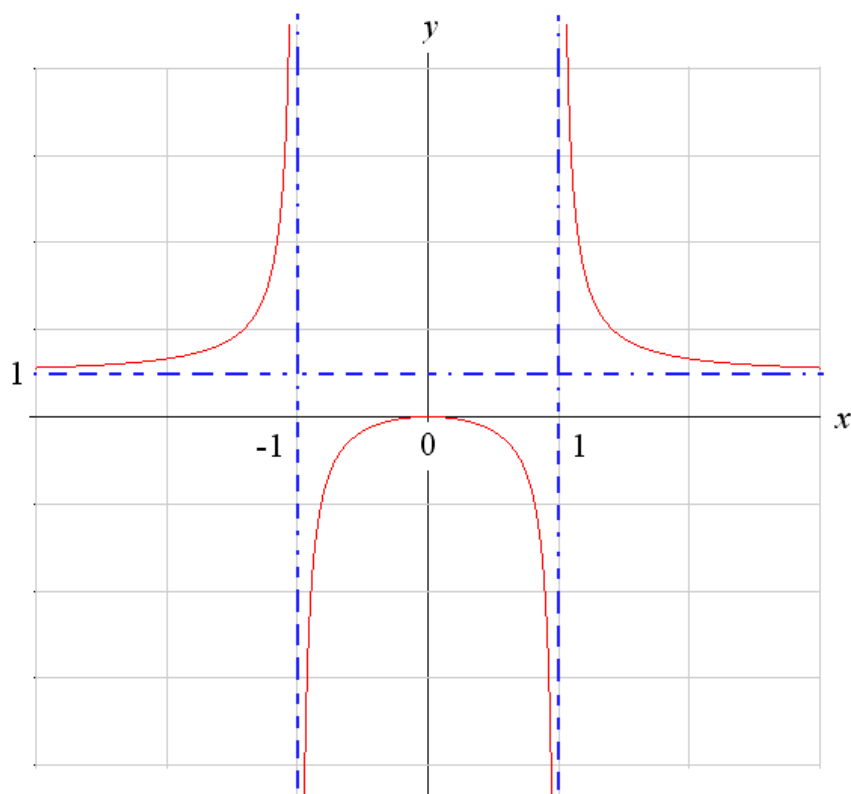


Рис. 4.6. Графік функції (приклад 8)

◆ Приклад 9а

Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Розв'язок

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3 \quad \text{і} \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

та прирівнюємо їх до нуля: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}; y = \frac{1}{3}$.

Таким чином, функція z має критичну точку $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Знаходимо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

Для точки $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ маємо:

$$z''_{xx}(M_0) = 2 = A; \quad z''_{xy}(M_0) = -1 = B; \quad z''_{yy}(M_0) = 2 = C$$

Обчислюємо $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, а також маємо $A > 0$. Отже точка M_0 є

точкою мінімуму й тоді $z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$. ♦

При знаходженні найбільших і найменших значень функції $z=f(x;y)$ в замкненій області D досить знайти критичні точки функції в середині області і на границі. Після цього необхідно порівняти значення функції в цих точках і кутових точках границі (якщо є такі). Найбільше і найменше серед цих значень і будуть відповідно найбільшим і найменшим значенням функції в замкненій області D .

◆ Приклад 9б

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$ в області, обмеженій прямими $x - 2y = 8$; $x = -2$; $y = 0$.

Розв'язок

Зобразимо графічно задану функцію та замкнену область, в якій проводиться пошук екстремуму (рис. 4.7, рис. 4.8).

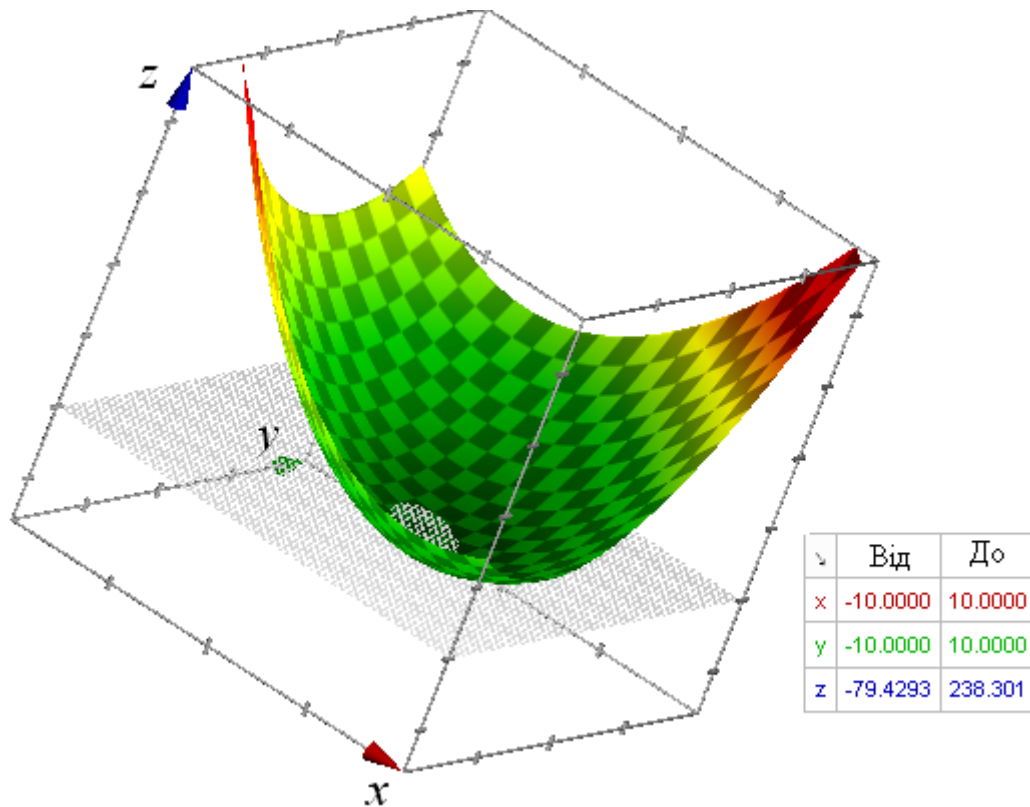


Рис. 4.7. Графік функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$

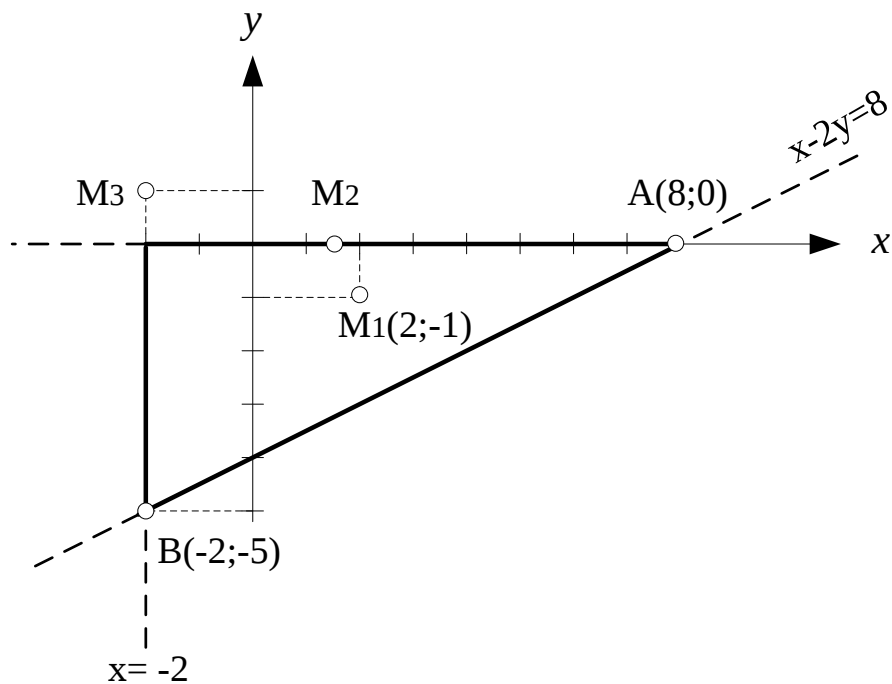


Рис. 4.8. Замкнена область, обмежена прямими $x-2y=8$, $x=-2$ і $y=0$

Знайдемо критичні точки в середині області. Для цього визначаємо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y.$$

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, знайдемо критичну точку $M_1(2;-1)$.

Відшукаємо критичні точки на границі $y=0$. Рівняння функції тоді прийме вигляд $z=x^2-3x$.

Знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля: $z' = 2x - 3$; $2x - 3 = 0$, $x = 1,5$. Значить критичною точкою на границі $y=0$ є точка $M_2(1,5;0)$.

Аналогічно на границі $x = -2$ (ліва сторона трикутника) маємо $z=y^2-2y+10$, $z' = 2y - 2$, $y = 1$.

Таким чином на прямій $x = -2$ критичною точкою буде $M_3(-2;1)$, яка не входить в область D (див. рис. 4.8, рис. 4.9).

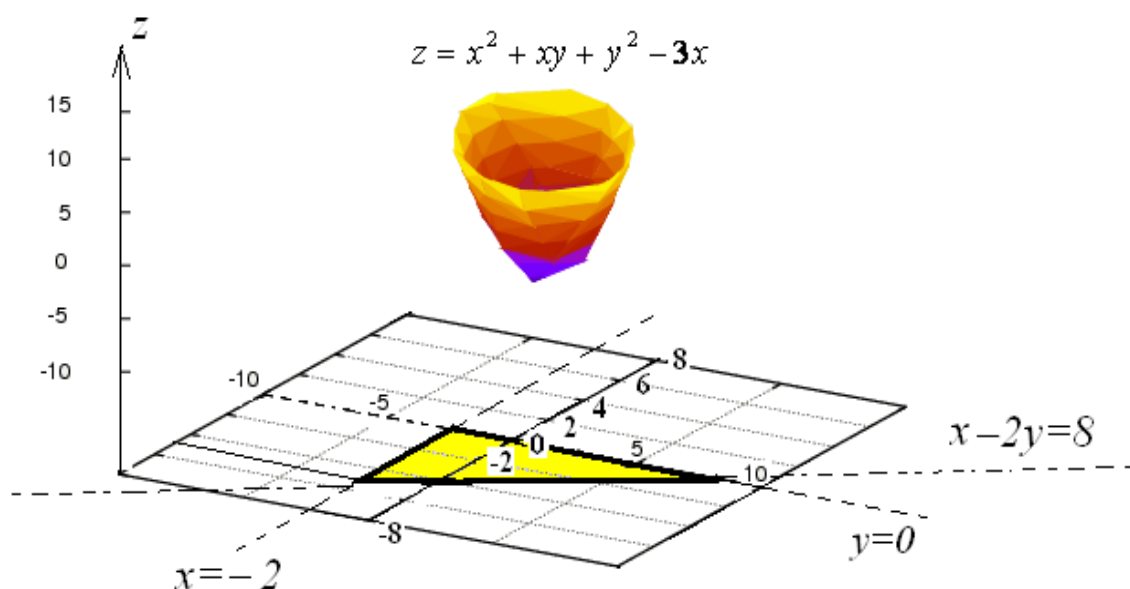


Рис. 4.9. Схематичне зображення функції $z=f(x,y)$ та замкнутої області D

При $x = 8 + 2y$, $z = 7y^2 - 34y + 40$, $z' = 14y - 34$, $y = 17/7$. Отже, на прямій $x - 2y = 8$, критичною буде точка $M_4\left(\frac{90}{7}; \frac{17}{7}\right)$, яка виходить за межі області D . Таким чином найбільше та найменше значення в замкненій області D функція може набувати в точках $M_1(2;-1)$, $M_2(1,5;0)$, $A(8;0)$, $B(-2;-5)$, $C(-2;0)$.

Знайдемо значення функції в цих точках: $z(2;-1) = -3$; $z(1,5;0) = -2,25$; $z(8;0) = 40$; $z(-2;-5) = 45$; $z(-2;0) = 10$.

Отже, найменше значення функція має в точці $M_1(2;-1)$ ($z(M_1) = -3$), а найбільше – в точці $B(-2;-5)$ ($z(B) = 45$), що і зображено на рис. 4.9. ♦

◆ Приклад 10

Знайти повний диференціал першого порядку $df(x; y)$ та частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = y^3 e^{2x} + \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язок

Послідовно знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 e^{2x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = 2y^3 e^{2x} + \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 e^{2x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = 3y^2 e^{2x} - \frac{1}{y};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \left(2y^3 e^{2x} + \frac{1}{x} \right) \Delta x + \left(3y^2 e^{2x} - \frac{1}{y} \right) \Delta y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(3y^2 e^{2x} - \frac{1}{y} \right) = 6y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2y^3 e^{2x} + \frac{1}{x} \right) = 6y^2 e^{2x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

◆

◆ Приклад 11

Обчисліть інтеграли:

а) $\int \frac{x+3}{2x+5} dx;$

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (tg x + 1)};$

в) $\int x \cdot \cos 2x dx.$

Розв'язок

а) Зробивши нескладні алгебраїчні перетворення, одержимо:

$$\int \frac{x+3}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+3}{x+\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{x+\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{5}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \ln |2x+5| + c.$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^2 x (tgx + 1)} &= \left. \begin{array}{l} \text{заміна змінної:} \\ tgx = t \\ dt = dtgx = (tgx) \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + c = \\
 &= \ln|tgx + 1| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \int x \cdot \cos 2x dx &= \left. \begin{array}{l} \text{частинами:} \\ u = x; du = dx \\ dv = \cos 2x dx; \int dv = \int \cos 2x dx; v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\
 &= x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

◆ Приклад 12

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}; \quad y = x^2; \quad \text{б) } x - y - 1 = 0; \quad y^2 - 2x - 1 = 0; \quad \text{в) } y = \frac{1}{1+x^2}; \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

Розв'язок

$$\text{а) Знаходимо точки перетину кривих: } \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^4.$$

$$x(1 - x^3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 1.$$

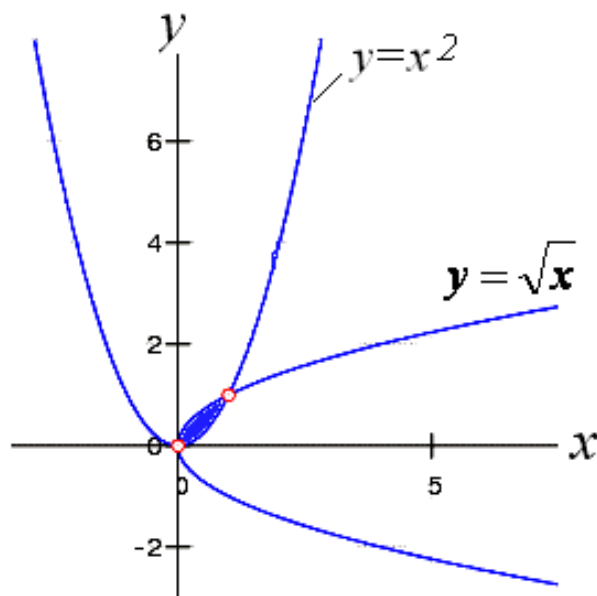


Рис. 4.10. Графік функцій (до прикладу 12а)

$$\text{Отже: } S = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3};$$

б) Знаходимо точки перетину кривих (див. рис. 4.11):

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \sqrt{2x + 1} \end{cases} \Rightarrow (x - 1)^2 = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; y_1 = -1 \\ x_2 = 4; y_2 = 3 \end{cases}.$$

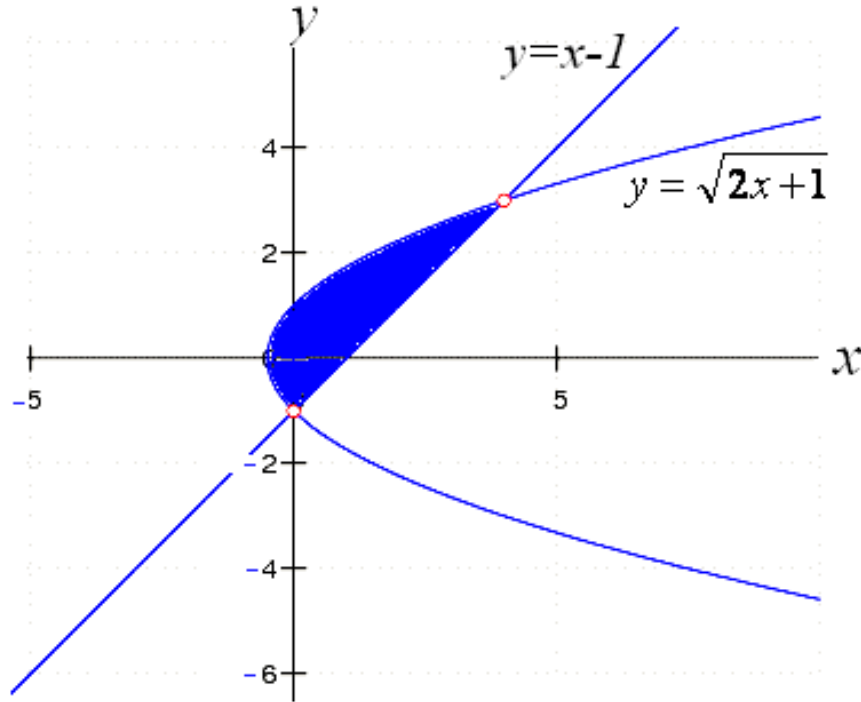


Рис. 4.11. Графік функцій (до приклад 12б)

$$\begin{aligned} \text{Отже: } S &= \int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx - \int_0^4 (x - 1) dx = \int_0^4 (2x + 1)^{1/2} dx - \int_0^4 x dx + \int_0^4 1 dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2x + 1)^{3/2}}{3} \Big|_0^4 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 + x \Big|_0^4 = 4\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

в) Знаходимо точки перетину кривих (див. рис. 4.12):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{1 + x^2} \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1; y_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1; y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Отже: } S = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{3\pi - 2}{6} = 1,23.$$

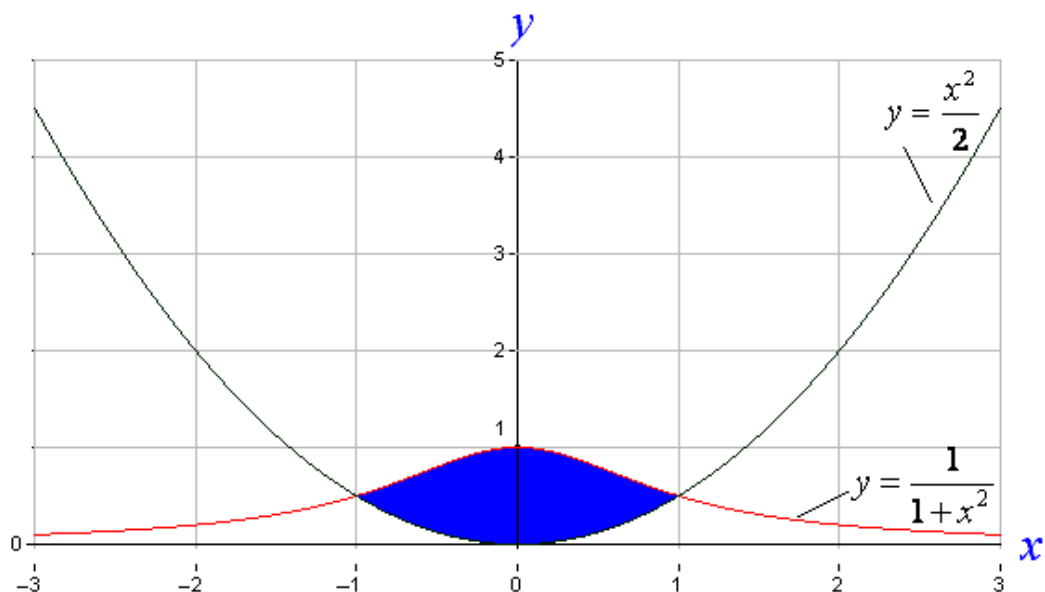


Рис. 4.12. Графік функцій (до прикладу 12в) ♦

♦ Приклад 13

Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язок

Використовуючи розкладання функції $\sin x$ в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + (-\infty < x < +\infty)$$

та почленно поділивши його на x , одержимо $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$

Цю рівність інтегруємо в межах від 0 до 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \cdot dx = \left(x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \dots = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{24 \cdot 25} - \frac{1}{720 \cdot 49} = -1,892. \end{aligned}$$

При підрахунках члени знакозмінного ряду, починаючи з четвертого, відкинуті. При цьому помилка не перебільшує абсолютної величини першого з відкинутих членів ряду:

$$\delta = \left| \frac{1}{7! \cdot 7} \right| = \frac{1}{720 \cdot 49} < 0,001. \quad \blacklozenge$$

◆ Приклад 14

Знайти інтервал збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+3} \cdot x^n$.

Розв'язок

Радіус збіжності $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, де $a_n = \frac{5^n}{2n+3}$; $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{2n+5}$.

$$\text{Тоді } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2n+3} \cdot \frac{2n+5}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{2n+3} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Дослідимо збіжність степеневому ряду на кінцях інтервалу при $x = \pm 0,2$.

При $x = -0,2$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$, в якому чергуються знаки. Для дослідження його збіжності використовуємо ознаку Лейбніца. Члени цього ряду спадають за абсолютними величинами. Обчислимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0.$$

Згідно з ознакою Лейбніца ряд буде збігатися.

На другому кінці інтервалу при $x=0,2$ із степеневому ряду одержимо такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}.$$

Для дослідження збіжності цього ряду застосуємо ознаку порівняння. Порівнюємо його з гармонійним рядом, про який відомо, що він розбігається. Знайдемо границю відношення загальних членів досліджуваного і гармонійного рядів при необмеженому зростанні порядкового номера:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки шукана границя ρ існує й відмінна від нуля, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд розбігається. З проведених досліджень випливає, що початковий степеневий ряд збігається на інтервалі $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$. ◆

◆ Приклад 15

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

$$a) y^2 e^x dx - (e^x + 2) dy = 0; \quad б) y' - \frac{1}{x} y = \ln x; \quad в) 3) y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}.$$

Розв'язок

а) Диференціальне рівняння $y^2 e^x dx - (e^x + 2) dy = 0$ є рівнянням з відокремлюючими змінними: $y^2 e^x dx = (e^x + 2) dy$; $\frac{e^x dx}{e^x + 2} = \frac{dy}{y^2}$.

Проінтегруємо обидві його частини: $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \int y^{-2} dy$; $\ln|e^x + 2| = -\frac{1}{y} + C$.

б) Рівняння $y' - \frac{1}{x} y = \ln x$ є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку і для його розв'язку використаємо підстановку $y = uv$, тоді $y' = u'v + v'u$, $u'v + v'u - \frac{1}{x} uv = \ln x$. Винесемо v за дужки: $v(u' - \frac{1}{x} u) + uv' = \ln x$; $u' - \frac{1}{x} u = 0$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u$; $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$; $\ln|u| = \ln|x|$; $u = x$; $uv' = \ln x$;

$$xv' = \ln x; \quad x \frac{dv}{dx} = \ln x; \quad dv = \ln x dx; \quad \int dv = \int x \ln x dx; \quad v = \int x \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по... частинам} \\ u = \ln x; \dots du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx; \dots v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$\text{Отже: } y = u \cdot v = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \right).$$

в) Рівняння $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ є однорідним диференціальним рівнянням. Для його розв'язку використаємо підстановку: $y = ux$. Тоді: $y' = u'x + u$;
 $u'x + u = \frac{ux}{x} \ln \frac{ux}{x}$; $u'x + u = u \cdot \ln u$; $u'x = u \ln u - u$; $\frac{du}{dx} x = u \ln u - u$; $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C;$$

оскільки $u = \frac{y}{x}$, маємо: $\ln \frac{y}{x} - 1 = x \cdot e^C$. Нехай $e^C = \bar{c}$, тоді

$$\ln u - 1 = x \cdot e^C; \ln \frac{y}{x} = x \cdot \bar{c} + 1. \blacklozenge$$

V. ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

РОЗДІЛ 1. ВСТУП ДО ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

1. Основні логічні знаки. Квантори загальності та існування.
2. Визначення множини та її елементів.
3. Наведіть приклади множин та числових множин
4. Вкажіть на співвідношення між множинами натуральних, раціональних та дійсних чисел.
5. Дайте визначення величини, наведіть приклади постійних і змінних величин.
6. Наведіть приклади інтервалів: замкнутих, відкритих, напіввідкритих та безконечних.
7. Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
8. Наведіть умову рівності двох комплексних чисел.
9. Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел?
10. Що служить геометричним зображенням комплексного числа і всієї множини комплексних чисел? Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
11. Скільки різних значень має корінь n -го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
12. Наведіть основну формулу Ейлера.

Завдання для самоконтролю до розділу 1

- 1. Знайти різницю множин A і B , якщо:**

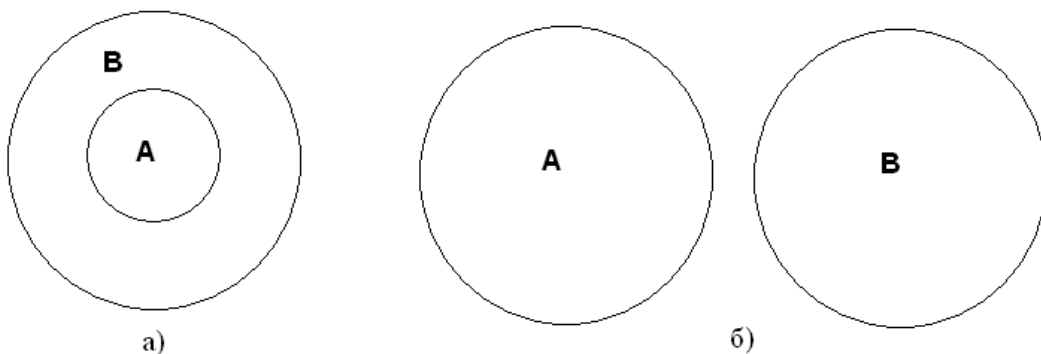


Рис. 4.1. Графічне зображення множин

2. Знайти перетин множин, якщо:

a) $A = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$, $B = \{-3; 1; 2; 5; 9; 11\}$;

6) $A = \{2; +\infty\}$, $B = \{-\infty; 3\}$.

3. Обчисліть: а) j^{36} , б) j^{46} , в) j^{125} , г) j^{239} .

4. Привести до алгебраїчної форми $z=x+jy$:

$$a) z = \frac{5+j}{(1+j)(2-3j)}; \quad б) z = \left(\frac{j^5+2}{j^{19}+1} \right)^2; \quad в) z = (2j-j^2)^2 \left(\frac{1-j}{1+j} \right)^3.$$

5. Запишіть число $\frac{2-j}{1+j}$ в алгебраїчній, показниковій та тригонометричній формах.

6. На комплексній площині зобразити область D , що задана нерівностями:

$$a) |z-2j+5| > 4; \quad б) 1 < |z-3j-2| \leq 2; \quad в) |z-3+j| > 1$$

$$г) \begin{cases} |z-1-j| < 1 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad д) \begin{cases} |z| < 2 \\ \operatorname{Re} z \geq 1 \\ \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad е) \begin{cases} |z-1| > 1 \\ -1 \leq \operatorname{Im} z < 0 \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 3 \end{cases}; \quad є) \begin{cases} 1 < |z-1| \leq 2 \\ \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Re} z < 1 \end{cases}.$$

7. Розв'язати рівняння:

$$a) (2-j)x + (5+6j)y = 1-3j; \quad б) (2x+3y) + (x-y)j = 2 + (2x+y)j.$$

8. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1+j\sqrt{3}}$.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Визначення й типи матриць.
2. Порівняння матриць та дії над матрицями.
3. Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?
4. Транспонована та обернена матриці.
5. Визначники, їх властивості і методи обчислення визначників.
6. Яка матриця називається невиродженою?
7. Знаходження оберненої матриці.
8. Що називається рангом матриці?
9. Визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
10. Яка система називається сумісною? Визначеною?
11. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі для лінійних систем.
12. Як знаходиться розв'язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці (матричний метод)?
13. Як розв'язується квадратна СЛАР методом Крамера?
14. Еквівалентні перетворення, метод Жордана-Гаусса (метод послідовного виключення невідомих).

Завдання для самоконтролю до розділу 2

1. Розв'язати систему рівнянь по формулам Крамера та методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ x + 6y - 5z = 2; \\ 3x + 5y - z = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x - 7y + 6z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 8x - 4y + 7z = 1 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 3y - 2z = 13 \\ 3x - y + z = -4 \\ 2x + 2y - 3z = 25 \end{cases}.$$

2. Обчислити визначник матриць:

$$\text{а) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Довести, що $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 100$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 15 & 20 & 10 & 5 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

4. Знайти значення виразу $AE - B^2$,

де $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, E – одинична матриця.

5. Знайти обернену матрицю для матриці $C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ та зробити перевірку.

6. Розв'язати СЛАР матричним методом $\begin{cases} x + 3y - 2z = 13 \\ 3x - y + z = -4 \\ 2x + 2y - 3z = 25 \end{cases}.$

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1. Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
2. Що таке скалярні та векторні величини?
3. Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними та протилежними?
4. Що називається проекцією вектора на вісь?
5. Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
6. Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
7. Як знайти модуль вектора, заданого в координатній формі?
8. Як формулюється умова колінеарності двох векторів?
9. Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
10. Що називається скалярним добутком векторів та які його властивості?

11. У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
12. Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
13. У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
14. Що називається змішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
15. У чому полягає геометричний зміст змішаного добутку?
16. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
17. Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
18. Що називається n -вимірним векторним простором? Який простір є лінійним?
19. Яка система векторів називається лінійно незалежною?

Завдання для самоконтролю до розділу 3

1. Чи є компланарними вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} = (1; 5; 2)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (2; 3; 4)$?
2. Знайти косинус кута між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{BC}$, якщо відомі координати точок $A(3; 3; -1)$, $B(5; 5; -2)$, $C(4; 1; 1)$.
3. Чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} = (-2; 4; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 7)$?
4. Дано трикутник ABC . Координати його вершин $A(5; 0)$, $B(1; 3)$, $C(-2; -2)$. Засобами векторної алгебри знайти довжину сторони BC та величину протилежного кута.
5. Обчислити об'єм тетраедру з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 : $A_1(7; 2; 4)$, $A_2(7; -1; -2)$, $A_3(3; 3; 1)$.

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Система координат. Пряма та площина

1. Дайте визначення аналітичної геометрії як науки.
2. Наведіть основні типи рівняння площини: рівняння площини, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій; рівняння площини у відрізках; рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно до вектора; загальне (повне) рівняння площини.
3. Як обчислюється кут між площинами?
4. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
5. Як обчислюється відстань від точки до площини?
6. Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі: канонічне; рівняння прямої, що проходить через дві задані незбіжні точки; параметричні рівняння; загальне рівняння прямої; рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої у відрізках.

7. Що називається кутовим коефіцієнтом прямої та який її геометричний зміст?
8. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
9. Як обчислюється кут між прямою і площиною?
10. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
11. Як обчислюється кут між прямими у просторі?
12. Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?

Лінії другого порядку

13. Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку? Які лінії другого порядку вам відомі?
14. Що називається колом? Наведіть канонічне рівняння кола, рівняння кола із заданим центром і радіусом.
15. Запишіть рівняння кола з центром у точці $C(1;2)$ та радіусом $r=4$.
16. Що називається еліпсом? Що являє собою еліпс, якщо його півосі рівні?
17. Наведіть канонічне рівняння еліпса.
18. Що називається гіперболою? Наведіть канонічне рівняння гіперболи.
19. Напишіть рівняння рівносторонньої гіперболи, асимптотами якої є осі координат.
20. Які рівняння асимптот гіперболи?
21. Що називається параболою? Наведіть канонічне рівняння параболі.
22. Яку форму має парабола, що задана рівнянням $y^2 = 2px$ або $x^2 = 2gy$? Як впливають параметри p і g на форму параболі?
23. Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболі?
24. Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболі?
25. У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболі?

Завдання для самоконтролю до розділу 4

1. Написати рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\overline{BC}$: $A(4;-2;0)$, $B(1;-1;-5)$, $C(-2;1;-3)$.
2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через три задані точки $M_1(-3;-1;1)$, $M_2(-9;1;-2)$, $M_3(3;-5;4)$.
3. Дані координати вершин піраміди $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;5)$, $A_4(4;-3;-1)$. Треба знайти:
 - а) довжину ребра A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - б) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
 - в) площу грані $A_1A_2A_3$;
 - г) рівняння прямої A_1A_2 ;
 - д) рівняння площини $A_1A_2A_3$.
4. Обчислити кут між двома площинами, що задані рівняннями: $4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $x - 4y - z + 9 = 0$.

5. Встановити вигляд і розміщення лінії другого порядку:

а) $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$, б) $y = -3 - \sqrt{3x^2 - 12x + 20}$, в) $x = 4 - \sqrt{y + 1}$,

г) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

6. Задані рівняння двох окружностей:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ і $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$. Найдіть точки перетинання.

РОЗДІЛ 5. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Дайте означення функції. Що називається областю визначення функції, яка задана формулою?
2. Що таке графік функції? Наведіть основні способи задання функції.
3. Які функції відносяться до основних елементарних? Графіки основних елементарних функцій.
4. Дайте визначення парної та непарної функції.
5. Яка функція називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
6. Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.
7. Що таке складна функція? Наведіть приклади.
8. Що називається послідовністю?
9. Яка послідовність називається обмеженою?
10. Що називається монотонною послідовністю?
11. Які послідовності називаються збіжними? Дайте визначення границі послідовності.
12. Сформулюйте ознаку існування границі послідовності.
13. Сформулюйте визначення безконечно великої послідовності.
14. Основні теореми про границі послідовностей.
15. Дайте визначення границі функції.
16. Сформулюйте основні теореми про границі функцій.
17. Що таке перша та друга важливі границі.
18. Дайте визначення неперервності функції в точці та на інтервалі.

Завдання для самоконтролю до розділу 5

Застосовуючи важливі границі, еквівалентні нескінченно малі та інші прийоми (крім правила Лопіталя), знайти вказані границі.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{2x^2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{3x^2 + 8x + 4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+11} - 3}{x^2 - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{3}{x^2}}$.

РОЗДІЛ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Що називається похідною функції?
2. У чому полягає фізичний зміст похідної?
3. У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4. За якими правилами обчислюється похідна суми, добутку та частки двох функцій?
5. Як знаходиться похідна складеної функції? Параметрично заданої функції?
6. Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
7. Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
8. Дайте означення похідної n -го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?
9. Що називається диференціалом функції?
10. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
11. Як зв'язані похідна і диференціал?
12. Сформулюйте правило обчислення диференціалу функції.
13. Сформулюйте ознаки зростання(спадання) функції на інтервалі.
14. У чому полягає правило Лопітала? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
15. Як зводяться невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞ ?
16. У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
17. Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?
18. У чому полягає необхідна умова екстремуму?
19. Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
20. У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
21. Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
22. У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?
23. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?
24. Яка функція називається випуклою (вогнutoю) в точці та на інтервалі?
25. Що таке точка перегину?
26. У чому полягають достатні умови випуклості та вогнутості?
27. У чому полягає необхідна умова точки перегину?
28. Що таке критичні точки другої похідної?
29. Сформулюйте правило дослідження функції на випуклість, вогнутість та перегин за другою похідною.

Завдання для самоконтролю до розділу 6

1. Знайти похідні першого порядку для функцій:

а) $y = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$; б) $y = 5\sin 2x + 4\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos \frac{5\pi}{12}$; в) $y = \sqrt[5]{2x+3} \cdot \operatorname{tg} 3x$;

г) $y = \cos^4 4x$; д) $y = x \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x$; е) $y = \cos^4 4x$.

2. Обчислити похідну $\frac{dy}{dx}$:

а) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = t^2 + 2t - 1 \\ y = t^3 - 3t + 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 + t \end{cases}$.

3. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку $[a; b]$:

а) $y = x - 2\sin x$; $[0, \pi]$,

б) $y = x - 3\ln x$; $[2, 4]$,

в) $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$; $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$,

г) $y = \sqrt{169 - x^2}$; $[-12, 5]$,

д) $y = x + \ln x$; $[1; e]$.

4. Дослідити задану функцію $y = x^2 e^{-x}$ та побудувати її графік на відрізку $[-1; 4]$.

РОЗДІЛ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. Що називається функцією декількох незалежних змінних; областю визначення функції?
2. Що називається функцією двох незалежних змінних; область значень функції?
3. У чому полягає геометричний зміст функції двох змінних?
4. Що називається частинною похідною функції двох змінних? Який їх геометричний зміст?
5. Дайте визначення частинних похідних другого порядку.
6. Що називається екстремумом функції двох змінних?
7. Сформулюйте необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних.

Завдання для самоконтролю до розділу 7

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = f(x, y)$.

а) $z = \ln(xy^3 + x^2 - 1)$.

е) $z = 2^{x^2 y^2 - x}$.

б) $z = (2 + x^2)^{y^3}$.

є) $z = \operatorname{tg}(x^2 + 2xy^3)$.

в) $z = \operatorname{ctg}(xy^2 + 4y)$.

ж) $z = (1 - 4y^3)^{x^2}$.

$$\text{г)} z = \sqrt{x^2 y^4 - 3x + 2}.$$

$$\text{з)} z = \sin(5x^2 - 3xy^2).$$

$$\text{д)} x = \cos(4xy^2 - 2x^2).$$

$$\text{и)} z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 y}.$$

2. Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$, якщо задана її уявна частина та знайти її похідну в точці z_0

$$\text{а)} v(x,y)=y^2-x^2-4x-3y+2x-1, \quad z_0 = -1+3j$$

$$\text{б)} v(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2, \quad z_0 = 1+4j$$

3. Знайти екстремуми функції $z = x^2 xy + y^2 - 3x - 6y$.

РОЗДІЛ 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. Дайте визначення первісної функції.
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Що називається інтегруванням функції?
4. Як пов'язані операції інтегрування та диференціювання функції
5. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтегралу.
6. У чому полягає геометричний зміст невизначеного інтегралу?
7. Наведіть таблицю основних інтегралів.
8. Які існують методи інтегрування?
9. Запишіть формулу інтегрування по частинах. Як вона отримана?
10. Що називається інтегральною сумою функції $y=f(x)$ на інтервалі $[a,b]$?
11. Що називається визначеним інтегралом від даної функції на даному інтервалі? Які задачі призводять до поняття визначеного інтеграла?
12. Який зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралом?
13. Сформулюйте властивості визначеного інтегралу.
14. Напишіть формулу Ньютона-Лейбница.
15. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла
16. Наведіть приклади геометричних та фізичних застосувань визначеного інтеграла
17. Які інтеграли називаються невластими і як вони обчислюються?

Завдання для самоконтролю до розділу 8

1. Обчислити невизначений інтеграл

$$\text{а)} \int 10^x dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx;$$

$$\text{і)} \int \frac{1}{\cos^2 5x} dx;$$

$$\text{б)} \int (3x^2 + 2x + \frac{1}{x}) dx;$$

$$\text{є)} \int \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8} dx;$$

$$\text{й)} \int e^{-3x+1} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{2x+3}{x^4} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx;$$

$$\text{к)} \int \sin^4 x \cdot \cos x dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{3 + \operatorname{ctg}^2 x}{4 \cos^2 x} dx;$$

$$\text{з)} \int e^{3x} dx;$$

$$\text{л)} \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx;$$

$$\text{д)} \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{и)} \int \sin(2x-5) dx;$$

$$\text{м)} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$$

2. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}};$

в) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}};$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x};$

г) $\int_1^2 x \log_2 x dx.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \frac{2}{\pi}x$ і $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$).

РОЗДІЛ 9. РЯДИ

1. Що називається рядом та його сумою?
2. У чому полягає збіжність ряду?
3. У чому суть критерію Коші збіжності ряду?
4. У чому виражається необхідна умова збіжності ряду?
5. Які ознаки збіжності числових рядів з невід'ємними членами вам відомі? Який числовий ряд називається знакозмінним? У чому суть його абсолютної та умовної збіжності?
6. У чому виражається достатня умова збіжності знакозмінного ряду?
7. Які ряди називаються функціональними?
8. У чому суть мажорантної ознаки (ознака Вейерштрасса) збіжності функціональних рядів?
9. Які ряди називаються степеневими? Як визначається радіус збіжності степеневому ряду?
10. Які ряди називаються рядами Тейлора і Маклорена?
11. Як виглядає розклад деяких елементарних функцій в ряди Тейлора?

Завдання для самоконтролю до розділу 9

1. Дослідити збіжність числового ряду

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n+1}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)!};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-3)}{3^{n-1}};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{2^{2n+1}};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!}.$

2. Знайти область збіжності степеневому ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{7n^3+1};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+3)2^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^5 5^n};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n}(3n^2+1)};$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+n^4)n};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(\sqrt{n}+1)}.$$

РОЗДІЛ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Дайте визначення диференційного рівняння
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Дайте визначення рівняння з відокремленими змінними.
5. Як розв'язуються однорідні диференціальні рівняння першого порядку?
6. Що являють собою лінійні диференціальні рівняння другого і більш високих порядків?
7. Диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.
8. Моделювання процесів за допомогою диференціальних рівнянь.

Завдання для самоконтролю до розділу 10

Знайти розв'язки диференціальних рівнянь

$$а) \frac{dy}{dx} = ky(N - y);$$

$$б) xy' = y \ln y;$$

$$в) x(1 + y^2) \cdot dx - y(1 + x^2) \cdot dy = 0;$$

$$г) (x^2 + x) \cdot y' = 2y + 1;$$

$$д) y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right);$$

$$е) xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dx = 0.$$

VI. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЗАЛІКУ

1. Матриці та дії над ними.
2. Обернена матриця.
3. Системи лінійних рівнянь (основні поняття). Матричний запис системи лінійних рівнянь.
4. Правило Крамера.
5. Метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь.
6. Ранг матриці та його обчислення.
7. Дослідження сумісності системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі.
8. Лінійні однорідні системи. Властивості розв'язків. Умова існування ненульових n розв'язків.
9. Прямокутна декартова система координат на площині та в просторі. Координати точки. Довжина відрізка.
10. Вектори на площині та в просторі. Лінійні операції над векторами та їх властивості.
11. Лінійна комбінація векторів. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи векторів на площині та в просторі.
12. Декартів базис. Координати вектора. Розкладання вектора по базису.
13. Довжина вектора, заданого координатами. Лінійні операції над векторами в координатах.
14. Лінійна залежність і незалежність векторів в R^n . Базис в R^n
15. Скалярний добуток векторів. Обчислення кута між векторами.
16. Обчислення відстані між двома точками на прямій, на площині і в просторі.
17. Пряма в просторі і на площині, канонічні та параметричні рівняння прямої, умови паралельності й перпендикулярності прямих.
18. Пряма на площині: загальне рівняння, рівняння з кутовим коефіцієнтом, рівняння у відрізках, нормальне рівняння. Відстань точки від прямої.
19. Криві другого порядку (визначення).
20. Еліпс, гіпербола, парабола.
21. Площина. Загальне рівняння площини.
22. Рівняння площини, що проходить через три точки.
23. Рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно даному вектору.
24. Кут між прямою й площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.
25. Числові послідовності. Властивості числових послідовностей.
26. Функції, способи завдання функції. Основні елементарні функції.
27. Границя змінної величини. Границя функції в точці.
28. Нескінченно малі та великі функції, їх властивості.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ

1. Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими функціями.
2. Границя функції $\sin x/x$ при $x \rightarrow 0$. Число e . Натуральні логарифми.
3. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції та їх використання при обчисленні границь.
4. Неперервність функції.
5. Похідна функції та її геометричний зміст.
6. Похідна суми, добутку й частки. Похідна складної функції.
7. Диференційованість функцій. Диференціал функції. Зв'язок диференціала з похідною.
8. Диференціал суми, добутку і частки. Правило знаходження диференціалу функції.
9. Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Лейбніца.
10. Формули Тейлора для основних елементарних функцій e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.
11. Умови зростання та спадання функції. Точки екстремуму. Необхідна та достатні ознаки існування екстремуму.
12. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення. Лінії та поверхні рівня. Геометричний зміст функції двох змінних.
13. Частини похідні (визначення). Повний диференціал і його властивості.
14. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови екстремуму функції двох змінних.
15. Первісна функція: визначення й основні властивості; формулювання достатніх умов існування.
16. Невизначений інтеграл: визначення й основні властивості. Таблиця основних інтегралів.
17. Основні формули і методи інтегрування.
18. Визначений інтеграл.
19. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
20. Невласні інтеграли від обмежених функцій по необмеженому проміжку (невласні інтеграли 1-го роду): визначення, дослідження, збіжності.
21. Числові ряди. Збіжність і сума ряду. Необхідна ознака збіжності. Властивості збіжних рядів.
22. Ряди з додатніми членами. Достатні ознаки збіжності: ознака порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.
23. Знакозмінний ряд. Абсолютна й умовна збіжності. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Ряди в яких чергуються знаки. Ознака Лейбніца.
24. Функціональні ряди. Область збіжності.

25. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейерштрасса. Властивості рівномірно збіжних рядів.
26. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Властивості степеневих рядів.
27. Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди. Застосування рядів для обчислення інтегралів.
28. Різні прийоми розкладання функцій у степеневі ряди. Застосування рядів для наближених обчислень.
29. Звичайні диференціальні рівняння. Основні поняття.
30. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремленими та з відокремлюючими змінними.
31. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
32. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
33. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

ДОДАТОК А. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Алгебраїчна форма: $z = x + jy$; $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$; $j = \sqrt{-1}$; $j^2 = -1$.

$$j^{4m+r} = j^r, \text{ наприклад } j^{239} = j^{4 \cdot 59 + 3} = j^3 = -j.$$

Модуль комплексного числа: $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Аргумент комплексного числа: } \varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

- 1) $(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$;
- 2) $(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$;
- 3) $(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$;
- 4) $\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$, за умови, що $x_2 + jy_2 \neq 0$.

Тригонометрична форма: $z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

- 1) $|z|_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot |z|_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = |z|_1|z|_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
- 2) $[|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$;
- 3) $\frac{|z|_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{|z|_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{|z|_1}{|z|_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;
- 4) $\sqrt[n]{|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$.

Показникова форма: $z = |z|e^{j\varphi}$

Дії над комплексними числами в показниковій формі:

- 1) $|z|_1 e^{j\varphi_1} \cdot |z|_2 e^{j\varphi_2} = |z|_1 |z|_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$;
- 2) $\frac{|z|_1 e^{j\varphi_1}}{|z|_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{|z|_1}{|z|_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$;
- 3) $(|z|e^{j\varphi})^n = |z|^n e^{jn\varphi}$.

ДОДАТОК Б. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається **скалярною величиною** (скаляром). Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається **векторною величиною** (вектором).

Координати вектора: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Довжина вектора: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Кут між векторами: $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{A_1A_3} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

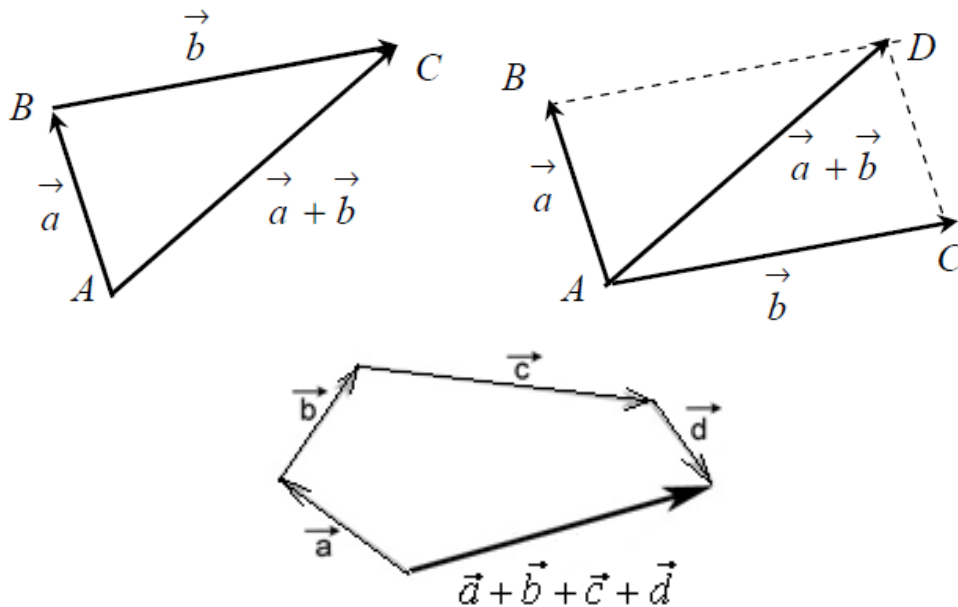
Множення вектора на число: $\vec{a} = (x, y, z), c \cdot \vec{a} = (cx, cy, cz)$.

Додавання двох векторів: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

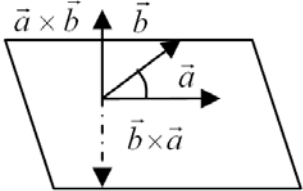
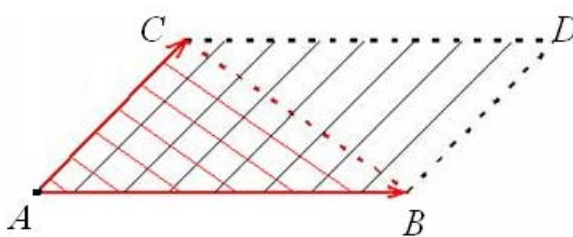
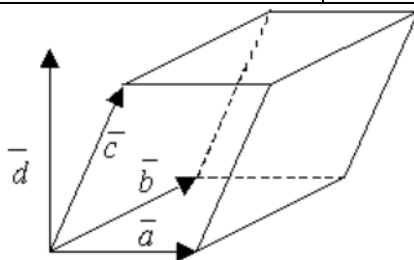
Віднімання двох векторів: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$



Додавання векторів

ДОДАТОК В.
ПОРІВНЯННЯ СКАЛЯРНОГО, ВЕКТОРНОГО ТА
ЗМІШАНОГО ДОБУТКУ

Назва і позначення	Означення	Координатна форма	Результат
1. Скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$	число
2. Векторний добуток векторів $\vec{a} \wedge \vec{b}$: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$	1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$. 2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ мають праву орієнтацію 3. $ \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ 	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$	вектор
Застосування векторного добутку Довжина векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограму який побудований на векторах-співмножниках $S_{ABDC} = \overline{AB} \times \overline{AC} , S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} $			
3. Змішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c}$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$	Змішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b} \wedge \vec{c}$.	$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	число
Застосування змішаного добутку Модуль змішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, утвореного векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.			

ДОДАТОК Г.
ТАБЛИЦЯ ЕКВІВАЛЕНТНИХ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ

Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

При цьому використовується така символіка: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

1.	$\sin x$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
2.	$\operatorname{tg} x$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
3.	$\arcsin x$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
4.	$\operatorname{arctg} x$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
5.	$1 - \cos x$	$\approx \frac{1}{2} x^2$	при $x \rightarrow 0$
6.	$e^x - 1$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
7.	$\ln(1 + x)$	$\approx x$	при $x \rightarrow 0$
8.	$\sqrt[n]{1 + x} - 1$	$\approx \frac{1}{n} x$	при $x \rightarrow 0$
9.	$a^x - 1$	$\approx \ln a$	при $x \rightarrow 0$
10.	$(1 + x)^\alpha - 1$	$\approx \alpha x$	при $x \rightarrow 0$
11.	$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \approx a_n x^n$		при $x \rightarrow \infty$

ДОДАТОК Д.
ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.
ЗВ'ЯЗОК МІЖ РІЗНИМИ ВИДАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Правило Лопіталя

Якщо в деякому околі точки x_0 функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані, і $g'(x) \neq 0$, а границя відношення функцій $f(x)$ і $g(x)$ має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right],$$

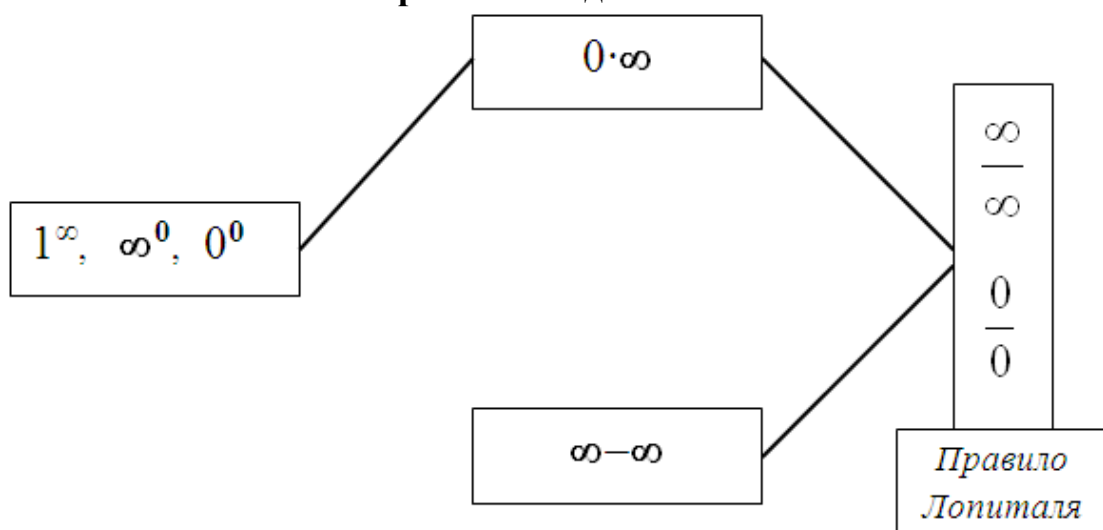
то границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя можна використовувати рекурентно, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

Зв'язок між різними видами невизначеності



У випадку невизначеності виду $(0 \cdot \infty)$ або $(\infty - \infty)$ потрібно спочатку алгебраїчно перетворити цю невизначеність у невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, а потім скористатися правилом Лопіталя.

У випадку невизначеності типу (0^0) або (∞^0) , або (1^∞) потрібно прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма, а потім скористатися тотожністю $y = e^{\ln y}$.

**ДОДАТОК Е.
ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ**

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n = \text{const}$
	$x' = 1;$
	$c' = 0, \quad c = \text{const}$
	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
	$(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2.	$(\sin x)' = \cos x$
3.	$(\cos x)' = -\sin x$
4.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
9.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
10.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
	$(e^x)' = e^x$
11.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

ДОДАТОК Є.
ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1.	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$
	$\int 1 dx = x + C; \quad \int 0 dx = x + C$
2.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, a > 0,$
	$\int e^x dx = e^x + C,$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
6.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C.$
7.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C.$
8.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$
9.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$
10.	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
11.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, \quad a \neq 0.$
12.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad x < a.$
13.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C, \quad a \neq 0.$
14.	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C.$

ДОДАТОК Ж. ПОКАЗНИКОВА Й ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

При моделюванні різних процесів використовуються показникова й логарифмічна функції. Встановимо їх властивості, попередньо пригадавши властивості піднесення довільного дійсного числа **a** до степеня **n** та приймаючи число **n** цілим і додатним:

$$a \cdot 0 = 0; a \cdot 1 = a; a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n; a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Із даних властивостей випливають основні правила піднесення до степеню:

$$a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m = a^{n+m}; \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{3-2} = a^1;$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6; \rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Показниковою функцією називається функція, в якій аргумент знаходиться в показнику степеня, тобто: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, де незалежна змінна **x** може приймати будь-які дійсні значення, а для показникової функції доречні зазначені правила:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; (a^x)^y = a^{x \cdot y}; (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y.$$

Поставимо запитання: до якого степеню варто піднести основу – число 2, щоб одержати число 8? Очевидно, степінь такої основи дорівнюватиме 3 (трьом): $2^3 = 8$. Загальний випадок знаходження результату (**b**) піднесення числа **a** до певного степеню **x** ($a^x = b$) може бути достатньо громіздким, особливо якщо **x** є дробовим числом, наприклад $x = 1,12$. Для полегшення розрахунків використовують поняття логарифму.

Логарифмом числа **b** при основі **a** називається показник степеню **x**, до якого треба піднести дану основу **a**, щоб одержати число **b**:

$$\log_a b = x. \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3; \log_2 2 = 1; \log_b b = 1.$$

$$\text{Приклади: } \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4; \log_{10} 100 = 2; \log_{10} x = 5; \rightarrow x = 10^5.$$

Логарифмуванням називається процес переходу від показникового запису рівності до логарифмічної:

$$a^x = b; \rightarrow \log_a b = x; \left(\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \right).$$

Потенціюванням називається зворотній перехід:

$$\log_a b = x; \rightarrow a^x = b.$$

Обидві відзначені форми запису рівності є еквівалентними.

Логарифмічна функція має **властивості**, що дозволяють звести множення – до додавання, ділення – до віднімання, зведення до степеню – до множення:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \log_a x^y = y \log_a x.$$

Серед логарифмічних функцій найбільш часто використовуються такі, в основі яких лежить число 10 або число **e**:

$$y = \log_{10} x = \lg x; \rightarrow x = 10^y; \quad y = \log_e x = \ln x; \rightarrow x = e^y; \quad \log_a 1 = 0.$$

У правдивості відмічених властивостей логарифмічної функції можна переконатися з таких покрокових перетворень.

Логарифм добутку двох чисел дорівнює сумі їх логарифмів:

$$\left. \begin{array}{l} a^{x_1} = b_1; \\ a^{x_2} = b_2; \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_a b_1 = x_1; \\ \log_a b_2 = x_2; \end{array} \right\} \rightarrow a^{x_1 + x_2} = b_1 \cdot b_2;$$

$$\log_a (b_1 b_2) = x_1 + x_2 = \log_a (b_1) + \log_a (b_2); \log_a (b_1 b_2) = \log_a (b_1) + \log_a (b_2).$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм цієї величини:

$$\log_a x^y = \log_a \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{y \text{ разів}} = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{y \text{ разів}} = y \log_a x.$$

Вираз для переходу логарифма числа **b** від однієї основи **a**, до іншої основи **c** можна одержати у такий спосіб:

$$a^x = b; \rightarrow \log_c a^x = \log_c b; x \cdot \log_c a = \log_c b; \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b;$$

$$a^x = b; \rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Бабенко В. В., Зіневич А. Г., Кічура С. М. Цаповська Ж. Я. Збірник задач з вищої математики. – Л.: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – 255 с.
2. Барабаш Г. М., Гаталевич А. І., Кічура С. М., Мильо О. Я. Практикум з курсу “Вища математика”. – Л.: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 157 с.
3. Гудименко Ф. С. Вища математика. – К.: Вид-во Київського ун-ту, 1964. – 380 с.
4. Кудрявцев В. А., Демидович В. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 1975.
5. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. – К.: ВЦ “Академія”, 2003. – 432 с.
6. Кастрица О. А. Высшая математика: примеры, задачи, упражнения: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИДАНА, 2002. – 543 с.
7. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі. – К.: ВЦ “Академія”, 2002. – 624с.
8. Абчук В. А. Математика для менеджеров и экономистов: Учебник. – СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2002г. – 525с.
9. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / под ред. В. И. Ермакова – М.: ИНФРА-М, 2001 – 656 с.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления: Учебник. – М.: Физматгиз, 1963. – 855с.
11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. – 20-е изд. – М.: Физматлит, 1985. – 384 с.

Додаткова

12. Робоча навчальна програма з дисципліни “Вища математика” для студентів спец. “Менеджмент організацій”, “Звукорежисура” / укл. П. С. Солодовник. – Луганськ: Луганськ-Арт, 2006. – 58 с.
13. Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов: Учебник. – М.: Экзамен, 2005. – 736 с.
14. Свердан П. Л. Вища математика: Математичний аналіз і теорія ймовірностей. – К.: Знання, 2008. – 450 с.
15. Ковальчук Т. В., Мартиненко В. С. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Вид-во Київ. нац. торг.-екон. ун-ту, 2005. – Ч. 1. – 395с.
16. Жолков С. Ю. Математика и информатика для гуманитариев: Учебник. – М.: Гардарики, 2002. – 531с.
17. Натансон Н. П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Изд-во “Лань”, 2001. – 736 с.
18. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: Инфра –М., 1998.

- 19.Шипачев В. С. Математический анализ: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2002. – 176с.с
- 20.Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М: Высшая школа, 1986. – ч.1. – 304 с.
- 21.Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М: Высшая школа, 1986. – ч.2. – 416 с.
- 22.Шкіль М. І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К: Либідь, 1994.
- 23.Андросчук Л. В., Ковтун О. І., Олешко Т. І. Вища математика. Ряди. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. К.: НАУ, 2005.
- 24.Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии.- М.: Физматгиз, 1973.
- 25.Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970.
- 26.Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
- 27.Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Збірник задач та вправ. – Харків: Рубікон, 1999.
- 28.Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум): Навч.посібник. – Тернопіль: Економічна думка, 2001.
- 29.Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциальные уравнения и операционное исчисление. – М.: Наука, 1968.
- 30.Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.
- 31.Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
- 32.Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

З М І С Т

ВСТУП	3
I. НАЗВА ТА ЗМІСТ ЛЕКЦІЙНОГО КУРСУ ДИСЦИПЛІНИ	6
II. НАЗВА ТА ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ ДИСЦИПЛІНИ	12
III. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ	17
3.1. Форми самостійної роботи студентів	17
3.2. Контрольні роботи	17
3.3. Методичні вказівки щодо виконання контрольних робіт	18
3.4. Завдання для виконання контрольних робіт	19
IV. ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ	26
V. ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	50
VI. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЗАЛІКУ	61
VII. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ	62
ДОДАТОК А. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ	64
ДОДАТОК Б. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	65
ДОДАТОК В. ПОРІВНЯННЯ СКАЛЯРНОГО, ВЕКТОРНОГО ТА ЗМІШАНОГО ДОБУТКУ	66
ДОДАТОК Г. ТАБЛИЦЯ ЕКВІВАЛЕНТНИХ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ	67
ДОДАТОК Д. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ РІЗНИМИ ВИДАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	68
ДОДАТОК Е. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ	69
ДОДАТОК Є. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ	70
ДОДАТОК Ж. ПОКАЗНИКОВА Й ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ	71
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	73

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів спеціалізації “Звукорежисура” освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр” усіх форм навчання

Укладачі:

Олексій Сергійович Воронкін

Поліна Степанівна Солодовник

Підп. до друку 08.02.2013. Формат 60х84 1/16. Папір офсет.
Гарнітура Times New Roman. Друк RISO. Ум. друк. арк. 4,8.
Тираж 50 пр. Зам. № 223.

Видавництво

Луганської державної академії культури і мистецтв
91055, м. Луганськ, Красна площа, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №2686 від 15. 11. 2006 р.
Тел.: 8 (0642) 59-02-62

